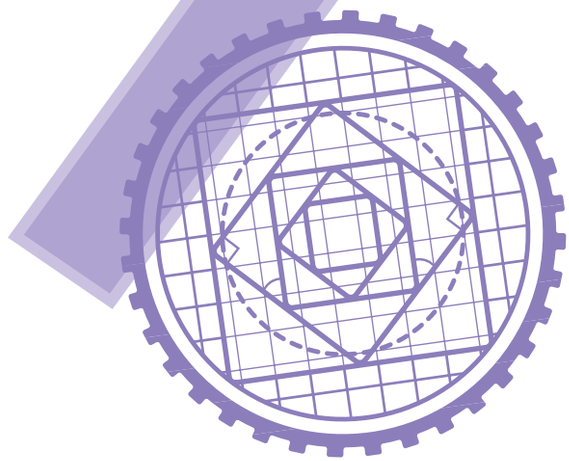
Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

Trigonometriset funktiot ja lukujonot



Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-2306-0 Pitkä matematiikka 9

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2391-6
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2392-3

Toimitus: Ville Sipiläinen
Ulkoasu: graafinen suunnittelu Veera Alanko, kansi Timo Jokivartio
Taitto: Jukka Nieminen
Piirrokset: Picman Oy, Pekka Könönen ja Tuomas Könönen

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Lukijalle

Pitkä matematiikka

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että opiskelija matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan hyödyntämään kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

Kertaaminen

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

Opettajan materiaali

Kirjan opettajan materiaali on Sanoma Pro Oppimisympäristössä. Materiaalissa muun muassa pohditaan opetusmenetelmiä ja selvennetään kirjan ja sen eri lukujen tavoitteita ja niiden ilmenemistä esimerkeissä ja tehtävissä. Lisäksi materiaali tarjoaa työskentelyn avuksi kalvopohjia ja testejä. Opettajan materiaali sisältää myös kaikkien tehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut.

Trigonometriset funktiot ja lukujonot

Kurssilla käsitellään kahta aihepiiriä, trigonometriaa ja lukujonoja.

Trigonometrian osuudessa opitaan uusi kulmakäsite, suunnattu kulma, yleistetään sini, kosini ja tangentti kaikensuuruisille kulmille ja opitaan näiden trigonometristen funktioiden perusominaisuuksia. Funktioiden tutkiminen derivaatan avulla tulee mahdolliseksi, kun opitaan uusi kulman suuruuden yksikkö, radiaani.

Lukujono on tärkeä ja hyödyllinen käsite sekä teoreettisessa että sovelluksiin suuntautuvassa matematiikassa. Kurssilla opitaan tutkimaan ja käyttämään lukujonoja ja lukujonoista muodostettuja summia.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 22.9.2006

Tekijät

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia.

Luku	Tuntimäärä
Suunnatun kulman kosini ja sini	2
Kosinin ja sinin ominaisuuksia	2
Kulman ratkaiseminen	2
Tangentti	2
Radiaani	1
Trigonometriset funktiot	3
Trigonometristen funktioiden derivaatat	3
Trigonometristen funktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja	2
Lukujono	2
Aritmeettinen jono	1
Geometrinen jono	2
Rekursiivinen jono	1
Aritmeettinen summa	2
Geometrinen summa	3

Sisällys

Suunnatun kulman kosini ja sini 7
Kosinin ja sinin ominaisuuksia 18
Kulman ratkaiseminen 26
Tangentti 36
Radiaani 46
Trigonometriset funktiot 53
Trigonometristen funktioiden derivaatat 66
Trigonometristen funktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja 75
Lukujono 83
Aritmeettinen jono 95
Geometrinen jono 101
Rekursiivinen jono 110
Aritmeettinen summa 118
Geometrinen summa 127
Äärettömät joukot ja numeroituvat joukot 140
Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ derivaatat 144

Kertaus 149
Kertaustehtäviä 170
Tehtäväsarjoja 175
Tehtävien vastaukset 179
Hakemisto 215

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9)

Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii tutkimaan trigonometrisia funktioita yksikköympyrän symmetrioiden avulla
- oppii ratkaisemaan sellaisia trigonometrisia yhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $\sin f(x) = a$ tai $\sin f(x) = \sin g(x)$
- osaa trigonometristen funktioiden yhteydet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\tan x = \sin x / \cos x$
- tutkii trigonometrisia funktioita derivaatan avulla
- ymmärtää lukujonon käsitteen
- oppii määrittelemään lukujonoja palautuskaavojen avulla
- osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla.

Keskeiset sisällöt

- suunnattu kulma ja radiaani
- trigonometriset funktiot symmetria- ja jaksollisuusominaisuuksineen
- trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen
- trigonometristen funktioiden derivaatat
- lukujono
- rekursiivinen lukujono
- aritmeettinen jono ja summa
- geometrinen jono ja summa

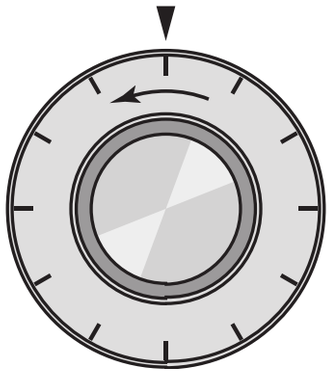
Suunnatun kulman kosini ja sini

Ongelma 1

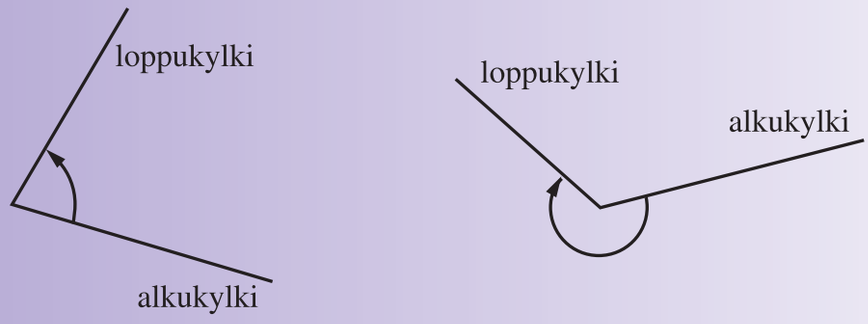
Niilo on saanut käsiinsä kassakaapin avaamisohjeen. Paperissa lukee:

$+120°,\ -150°,\ 540°,\ -720°.$

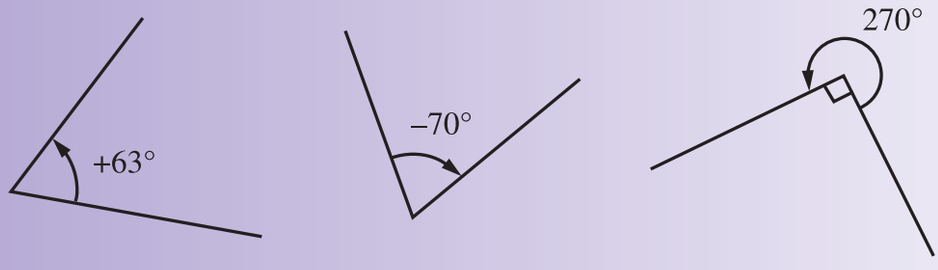
Kassakaapin ovessa on asteikolla varustettu kiekko, johon on nuolella merkitty positiivinen kiertosuunta. Kuinka Niilo saa kassakaapin auki?



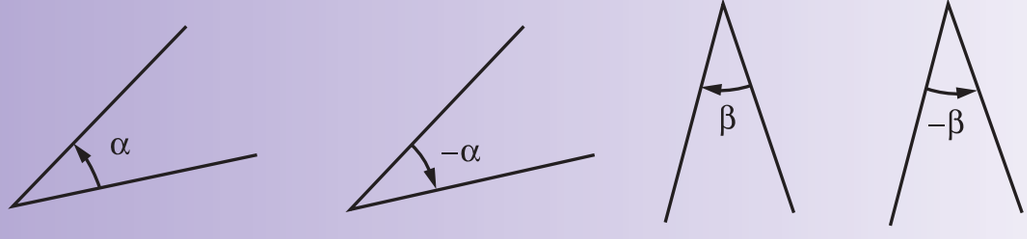
Suunnattu kulma



Suunnattu kulma ilmaisee kierron suunnan ja suuruuden. Kiertosuunta ilmaistaan merkitsemällä nuolenkärki kulman aukeamaan piirrettyyn kaareen. Suunnatulla kulmalla on *alkukylki* ja *loppukylki*.



Suunnattuja kulmia mitataan kuten tavallisia kulmia ja kiertosuunta ilmaistaan etumerkillä. Kierto vastapäivään on positiivinen. Kierto myötäpäivään on negatiivinen. Siksi kiertosuuntaa vastapäivään sanotaan *positiiviseksi kiertosuunnaksi* ja kiertosuuntaa myötäpäivään *negatiiviseksi kiertosuunnaksi*.



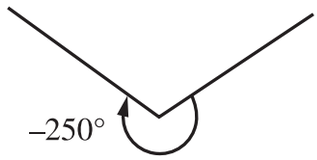
Jos kulman kiertosuuntaa vaihdetaan, saadaan kulman *vastakulma.* Kulman α vastakulma merkitään $-\alpha$.

ESIMERKKI 1

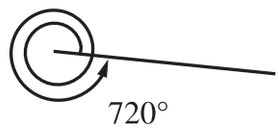
Piirrä kulma. a) $-250°$ b) $720°$ c) $-1330°$

Ratkaisu

a) Kulman $-250°$ kiertosuunta on myötäpäivään.



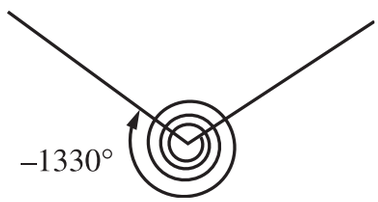
b) Kulma $720° = 360° + 360°$ muodostuu kahdesta täyden kulman kierrosta positiiviseen suuntaan.



c) Erotetaan kulmasta $-1330°$ ensin negatiiviset täysikulmat:

$-1330° = 3 \cdot (-360°) - 250°$.

Kulma $-1330°$ muodostuu kolmesta täysikulmasta negatiiviseen suuntaan jatkettuna kulmalla $-250°$.



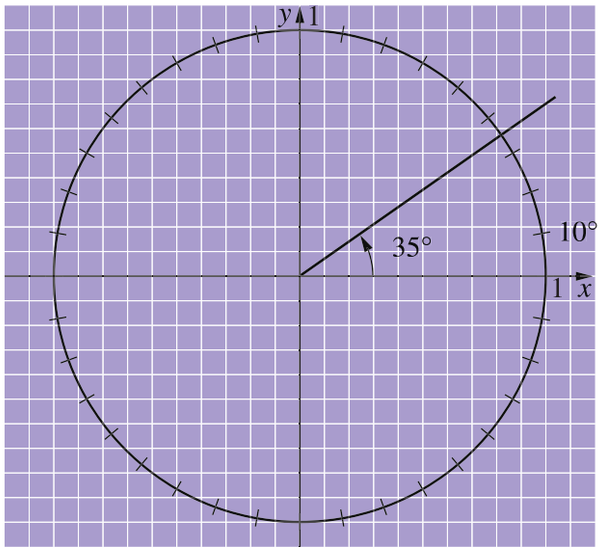
Ongelma 2

Ympyrän keskipiste on origo ja ympyrän säde on 1.

a) Määritä kuviosta yhden desimaalin tarkkuudella $\cos 35°$ ja $\sin 35°$.

b) Anna ehdotus luvuiksi $\cos 230°$ ja $\sin 230°$.

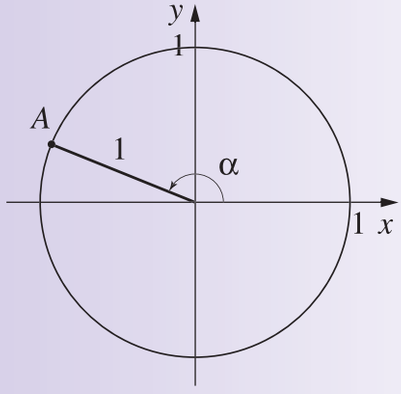
c) Anna ehdotus luvuiksi $\cos(-220°)$ ja $\sin(-220°)$.



Kurssissa Geometria määriteltiin tylpän kulman kosini ja sini. Seuraavassa kerrataan oivallus, johon määritelmä perustui, ja yleistetään määritelmä kaikille suunnatuille kulmille.

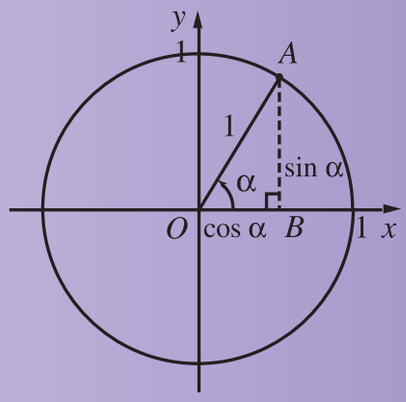
Yksikköympyrä ja kulman kehäpiste

Ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde 1, sanotaan *yksikköympyräksi*. Sijoitetaan suunnattu kulma α koordinaatistoon niin, että kulman kärki on origossa ja kulman alkukylki on positiivinen x-akseli. Kulman α loppukyljen ja yksikköympyrän leikkauspiste A on *kulman α kehäpiste*.



Terävän kulman kosinin ja sinin tulkinta kehäpisteen koordinaatteina

Terävän kulman kosini ja sini on alunperin määritelty suorakulmaisen kolmion sivujen suhteina. Terävän kulman sini ja kosini voidaan tunnistaa myös yksikköympyrästä.



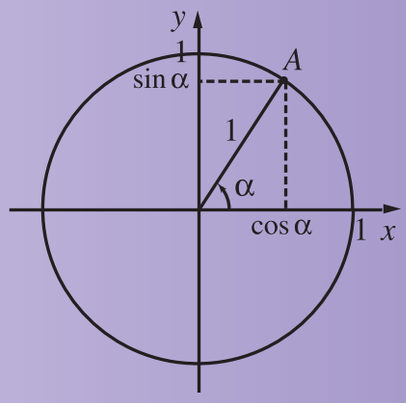
Jos kulma α on terävä, niin suorakulmaisen kolmion OAB kateettien pituudet ovat $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$.

Toisin sanoen:

$\cos\alpha$ on kulman α kehäpisteen x-koordinaatti

ja

$\sin\alpha$ on kulman α kehäpisteen y-koordinaatti.

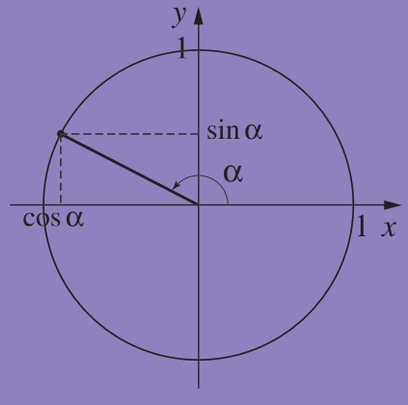


Terävän kulman kosinilla ja sinillä on siis tulkinta, joka voidaan yleistää kaikille suunnatuille kulmille.

Suunnatun kulman kosinin ja sinin määritelmä

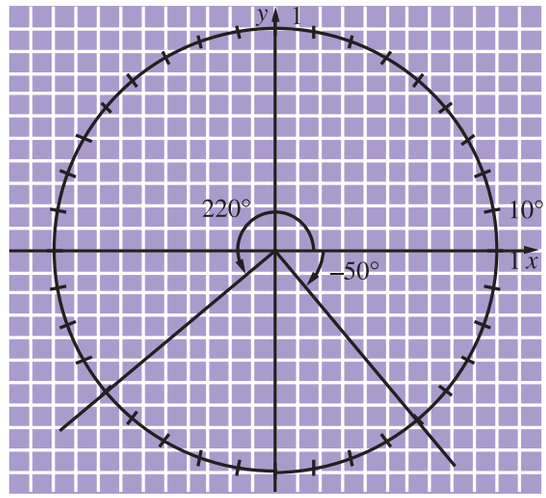
Kulman α *kosini* on kulman α kehäpisteen x-koordinaatti.

Kulman α *sini* on kulman α kehäpisteen y-koordinaatti.



ESIMERKKI 2

Määritä kuviosta yhden desimaalin tarkkuudella
a) cos 220° ja sin 220°
b) cos (–50°) ja sin (–50°)
c) cos (–770°) ja sin (–770°).



Ratkaisu

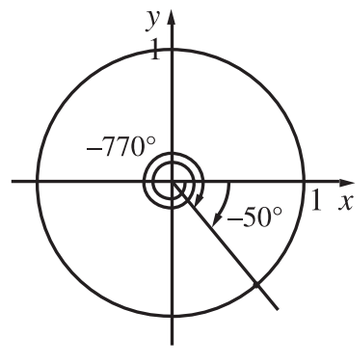
a) Kulman 220° kehäpisteen x-koordinaatti on noin –0,8.
Siis $\cos 220° \approx -0{,}8$.
Kehäpisteen y-koordinaatti on noin –0,6. Siis $\sin 220° \approx -0{,}6$.

b) Kulman –50° kehäpisteen x-koordinaatti on noin 0,6 ja y-koordinaatti noin –0,8. Siis $\cos(-50°) \approx 0{,}6$ ja $\sin(-50°) \approx -0{,}8$.

c) Erotetaan kulmasta –770° negatiiviset täysikulmat:

$-770° = 2 \cdot (-360°) - 50°$.

Kulmalla –770° on sama kehäpiste kuin kulmalla –50°.
Siis $\cos(-770°) = \cos(-50°) \approx 0{,}6$ ja
$\sin(-770°) = \sin(-50°) \approx -0{,}8$.



Vastaus

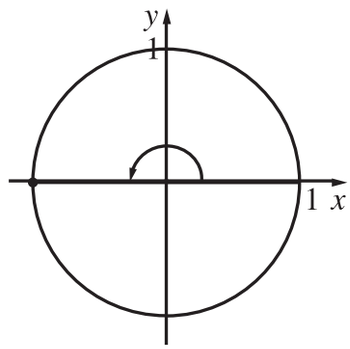
a) $\cos 220° \approx -0{,}8$ ja $\sin 220° \approx -0{,}6$
b) $\cos(-50°) \approx 0{,}6$ ja $\sin(-50°) \approx -0{,}8$
c) $\cos(-770°) \approx 0{,}6$ ja $\sin(-770°) \approx -0{,}8$

ESIMERKKI 3

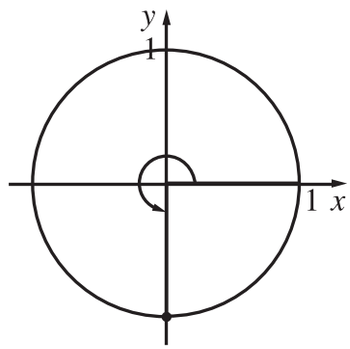
Määritä a) $\cos 180°$ ja $\sin 180°$ b) $\cos 270°$ ja $\sin 270°$.

Ratkaisu

a) Kulman $180°$ kehäpiste on $(-1, 0)$.
Siis $\cos 180° = -1$ ja $\sin 180° = 0$.



b) Kulman $270°$ kehäpiste on $(0, -1)$.
Siis $\cos 270° = 0$ ja $\sin 270° = -1$.



Vastaus

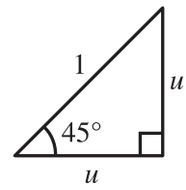
a) $\cos 180° = -1$ ja $\sin 180° = 0$
b) $\cos 270° = 0$ ja $\sin 270° = -1$

ESIMERKKI 4

Määritä kulman α kosinin ja sinin tarkka arvo, kun α on
a) $45°$ b) $225°$.

Ratkaisu

a) Suorakulmainen kolmio, jossa on $45°$:n terävä kulma, on tasakylkinen. Lasketaan kolmion kateettien pituus u, kun hypotenuusan pituus on 1.

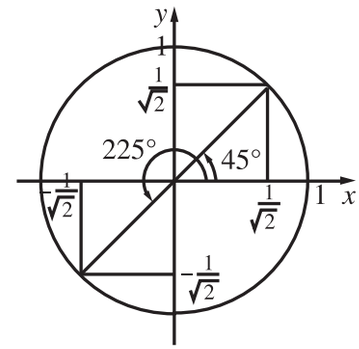


$$u^2 + u^2 = 1^2$$
$$2u^2 = 1$$
$$u^2 = \frac{1}{2}$$
$$u = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{tai } u = -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Siis $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

b) Kulman $225° = 180° + 45°$ kehäpiste saadaan kulman $45°$ kehäpisteestä peilaamalla origon suhteen. Siis

$$\cos 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ja} \quad \sin 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



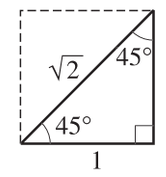
Vastaus

a) $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\cos 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

---

* Voidaan myös käyttää niin sanottua muistikolmiota (neliön puolikasta). Muistikolmion mukaan tasakylkisessä suorakulmaisessa kolmiossa kateetin pituuden suhde hypotenuusan pituuteen on $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

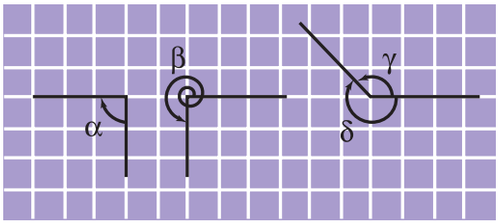


TEHTÄVIÄ

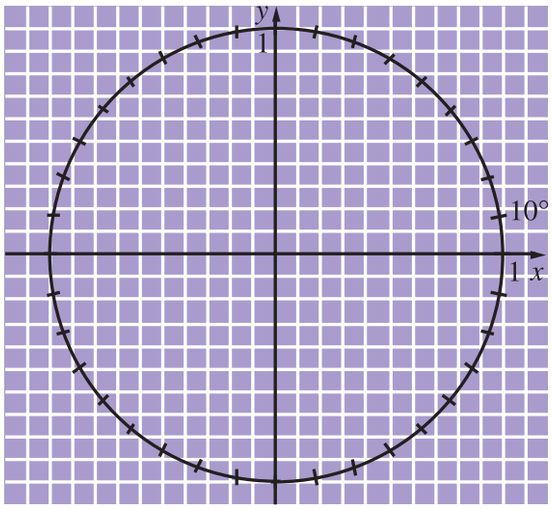
SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

1. Piirrä kulma.
a) 230° b) −60°
c) 800° d) −700°

2. Kuinka suuret kuvioon merkityt suunnatut kulmat α, β, γ ja δ ovat?



3. Määritä alla olevan yksikköympyrän avulla yhden desimaalin tarkkuudella
a) cos 120° ja sin 120°
b) cos (−150°) ja sin (−150°)
c) cos 1920° ja sin 1920°.
Tarkista laskimella.



4. Määritä yksikköympyrän avulla
a) cos 90° ja sin 90°
b) cos 360° ja sin 360°
c) cos (−180°) ja sin (−180°)
d) cos 630° ja sin 630°.

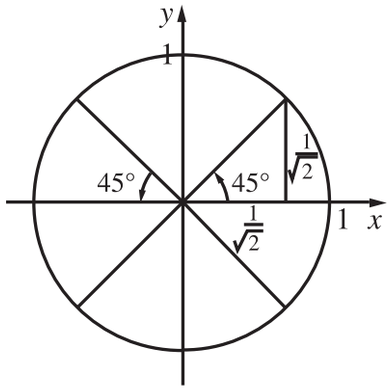
5. Määritä neljä eri kulmaa, jotka eivät kaikki ole samanmerkkisiä ja joiden
a) sinin arvo on nolla
b) kosinin arvo on yksi
c) sinin arvo on −1.

6. Laske lausekkeen $\sin 3\alpha + \cos 2\alpha$ arvo, kun a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = -90°$. Päättele sinin ja kosinin arvot yksikköympyrästä.

7. Olkoon $\alpha = 97°$. Laske laskimella kahden desimaalin tarkkuudella
a) $2\cos\alpha$ ja $\cos 2\alpha$
b) $2\sin\alpha$ ja $\sin 2\alpha$.

8. a) Täydennä taulukko sinin ja kosinin tarkoilla arvoilla. Käytä alla olevaa kuviota apuna.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
45°		
135°		
225°		
315°		



b) Määritä taulukon avulla kulmien −225° ja 2115° sinin ja kosinin tarkat arvot.

9. Laske lausekkeen $\sin 3\alpha + 3\cos\alpha$ arvo, kun a) $\alpha = 45°$ b) $\alpha = 135°$.
Käytä hyväksi edellisen tehtävän taulukkoa tai taulukkokirjaa.

10. Laske lausekkeen $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos(\alpha - 135°)$ arvo, kun a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = -90°$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

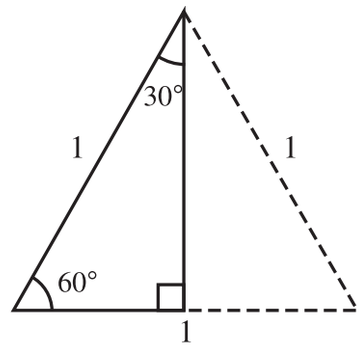
11. Anna esimerkki kahdesta positiivisesta kulmasta ja kahdesta negatiivisesta kulmasta, jotka voidaan piirtää niin, että niillä on sama alkukylki ja sama loppukylki kuin $40°$:n kulmalla.

12. Määritä välillä $[0°, 360°]$ oleva kulma, jolla on sama kehäpiste kuin kulmalla α, kun
a) $\alpha = 425°$ b) $\alpha = -580°$.
Määritä edelleen tehtävässä 3 olevan yksikköympyrän avulla yhden desimaalin tarkkuudella $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$.

13. Määritä neljä eri kulmaa, jotka eivät kaikki ole samanmerkkisiä ja joiden
a) sinin arvo on yksi
b) kosinin arvo on nolla
c) kosinin arvo on -1.

14. Laske lausekkeen $2\sin\frac{1}{2}\alpha + \cos 3\alpha$ arvo, kun a) $\alpha = 180°$ b) $\alpha = 360°$. Päättele sinin ja kosinin arvot yksikköympyrästä.

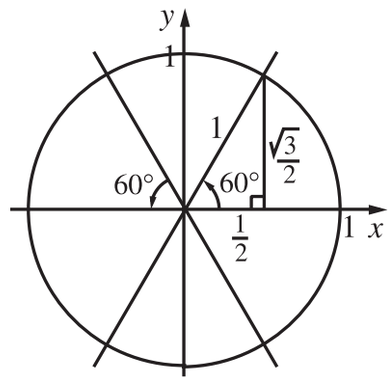
15. Suorakulmainen kolmio, jonka terävät kulmat ovat $60°$ ja $30°$, on tasasivuisen kolmion puolikas. Osoita, että jos kolmion hypotenuusan pituus on 1, niin kolmion kateettien pituudet ovat $\frac{1}{2}$ ja $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Merkitse taulukoihin kulmien sinin ja kosinin tarkat arvot. Käytä kuvioita apuna.

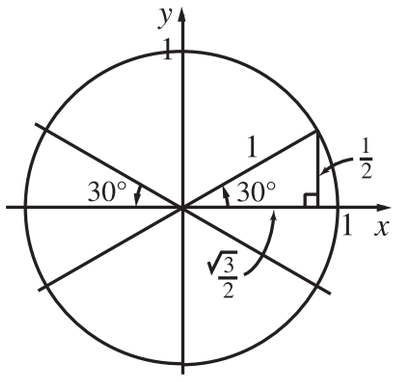
a)

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
60°		
120°		
240°		
300°		



b)

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
30°		
150°		
210°		
330°		



16. Määritä kulman sini ja kosini. Käytä hyväksi taulukkokirjaa tai edellisen tehtävän taulukkoja. a) 570° b) −300°

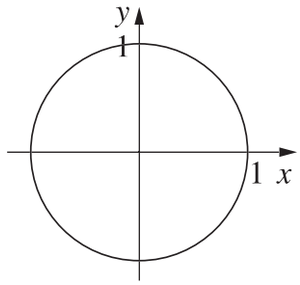
17. Laske lausekkeen
$2\sin(\alpha + 90°) - 2\cos 2\alpha$ arvo, kun a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 150°$. Käytä hyväksi taulukkokirjaa tai tehtävän 15 taulukkoja.

18. Laske lausekkeen $\sin\frac{\alpha}{4} + 3\cos\frac{\alpha}{3}$ arvo, kun a) $\alpha = 180°$ b) $\alpha = 900°$.

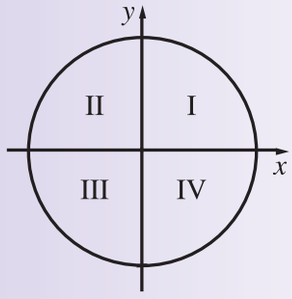
Kosinin ja sinin ominaisuuksia

Ongelma

Piirrä kuvioon kaksi kulmaa, joiden
a) sinit ovat samanmerkkiset ja kosinit erimerkkiset
b) sinit ovat erimerkkiset ja kosinit samanmerkkiset.



Yksikköympyrä voidaan jakaa kuvan mukaisesti ensimmäiseen, toiseen, kolmanteen ja neljänteen *neljännekseen*.

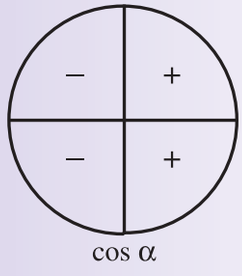


Kulman kosini on kulman kehäpisteen x-koordinaatti, ja kulman sini on kehäpisteen y-koordinaatti.

Yksikköympyrän pisteiden x-koordinaattien merkeistä nähdään:

Kosinin merkit

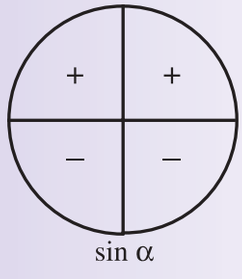
Kulman α kosini on positiivinen, jos α:n loppukylki on I tai IV neljänneksessä, ja muualla negatiivinen.



Yksikköympyrän pisteiden y-koordinaattien merkeistä nähdään:

Sinin merkit

Kulman α sini on positiivinen, jos α:n loppukylki on I tai II neljänneksessä, ja muualla negatiivinen.



ESIMERKKI 1

Missä neljänneksessä kulman a) $700°$ b) $-1000°$ loppukylki on, jos kulman alkukylki on positiivinen x-akseli? Minkä merkkiset kulman kosini ja sini ovat?

Ratkaisu

a) Erotetaan $700°$:n kulmasta täysikulmat: $700° = 360° + 340°$. Kulman loppukylki on siis samassa neljänneksessä kuin $340°$:n kulman loppukylki eli IV neljänneksessä. Siis $\cos 700°$ on positiivinen ja $\sin 700°$ on negatiivinen.

b) Erotetaan negatiiviset täysikulmat: $-1000° = 2 \cdot (-360°) - 280°$. Kulman loppukylki on samassa neljänneksessä kuin kulman $-280°$ loppukylki eli I neljänneksessä. Siis $\cos(-1000°)$ ja $\sin(-1000°)$ ovat molemmat positiivisia.

Vastaus

a) IV neljänneksessä, kosini positiivinen ja sini negatiivinen
b) I neljänneksessä, kosini ja sini molemmat positiivisia

Kosinin ja sinin arvojoukko

Koska kulman kosini ja sini ovat yksikköympyrän pisteiden koordinaatteja, kosinin ja sinin arvot vaihtelevat -1:n ja 1:n välissä:

$$-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1.$$

Kosini ja sini saavat kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$, joten funktioiden $\cos \alpha$ ja $\sin \alpha$ arvojoukko on suljettu väli $[-1, 1]$.

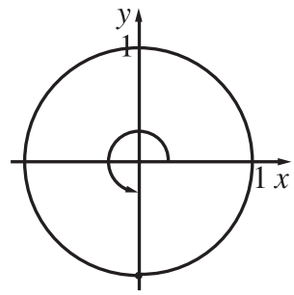
ESIMERKKI 2

Mitkä kulmat α toteuttavat yhtälön?

a) $\sin\alpha = -1$ b) $\cos\alpha = 0$ c) $\cos\alpha = 1{,}3$

Ratkaisu

a) Kulman α sini on -1, kun kulman α kehäpiste on $(0, -1)$. Yksi kulma, jonka kehäpiste on $(0, -1)$, on kulma $270°$.



Sama kehäpiste $(0, -1)$ on kaikilla kulmilla, jotka saadaan, kun kulmaan $270°$ lisätään tai siitä vähennetään täysikulman $360°$ monikerta, eli kulmilla

$270° + 360° = 630°$, $270° + 2 \cdot 360° = 990°$, $270° + 3 \cdot 360° = 1350°$ jne.

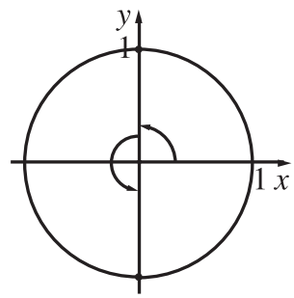
ja

$270° - 360° = -90°$, $270° - 2 \cdot 360° = -450°$, $270° - 3 \cdot 360° = -810°$ jne.

Kaikki kulmat, joiden sini on -1, ovat siis muotoa $\alpha = 270° + n \cdot 360°$, missä n on kokonaisluku. Kulma α toteuttaa yhtälön $\sin\alpha = -1$, kun

$\alpha = 270° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.

b) Kulman α kosini on 0, kun kulman α kehäpiste on $(0, 1)$ tai $(0, -1)$. Piste $(0, 1)$ on kulman $90°$ kehäpiste. Kaikki muut kulmat, joiden kosini on 0, saadaan, kun kulmaan $90°$ lisätään oikokulman $180°$ positiivinen tai negatiivinen monikerta. Siis kulma α toteuttaa yhtälön $\cos\alpha = 0$, kun



$\alpha = 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.

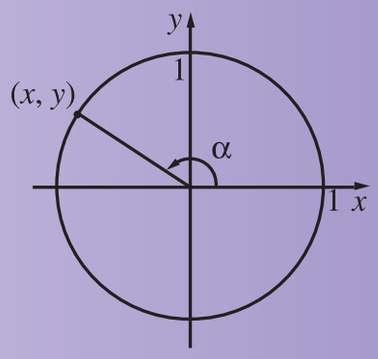
c) Funktion $\cos\alpha$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$. Siis minkään kulman kosini ei ole $1{,}3$.

Vastaus

a) $\alpha = 270° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
c) Mikään kulma ei toteuta yhtälöä.

Kulman α kosini ja sini ovat yksikköympyrän pisteen koordinaatit. Jokaisen yksikköympyrän pisteen (x, y) origosta lasketun etäisyyden neliö on 1, eli

$x^2 + y^2 = 1$.*



Sijoitetaan yhtälöön kulman α kehäpisteen koordinaatit $x = \cos\alpha$ ja $y = \sin\alpha$.

$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Sinin ja kosinin potenssit $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$ jne. merkitään yleensä seuraavasti ilman sulkeita:

$(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$ jne.

On saatu:

Pythagoraan lause trigonometrisille funktioille

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Jokaisen kulman sinin ja kosinin neliöiden summa on 1.

---

* Koordinaattien itseisarvot $|x|$ ja $|y|$ ovat kateettien pituudet suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusan pituus on 1, joten Pythagoraan lauseen nojalla $|x|^2 + |y|^2 = 1^2$ eli $x^2 + y^2 = 1$. Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ on yksikköympyrän yhtälö. Yleisesti, jos ympyrän keskipiste on (a, b) ja säde r, ympyrän yhtälö on $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (kurssi Analyyttinen geometria).

ESIMERKKI 3

Määritä kulman α kosinin tarkka arvo, kun tiedetään, että $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ ja että α on välillä $[-180°, -90°]$.

Ratkaisu

Trigonometristen funktioiden Pythagoraan lauseen mukaan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, joten

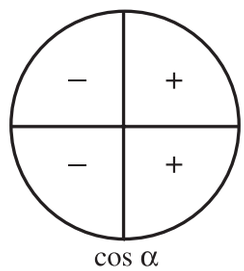
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Siis

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \quad \text{tai} \quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Kulma α on välillä $[-180°, -90°]$ eli III neljänneksessä, joten kulman α kosini on negatiivinen. Siis

$$\cos\alpha = -\frac{12}{13}.$$



Vastaus

$$-\frac{12}{13}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

19. Missä neljänneksessä kulman loppukylki on, kun alkukylki on positiivinen x-akseli? Minkä merkkiset kulman kosini ja sini ovat?

a) $240°$ b) $1360°$
c) $-400°$ d) $-2650°$

20. Mitkä kulmat toteuttavat yhtälön?

a) $\cos\alpha = 1$ b) $\sin\alpha = 0$ c) $\cos\alpha = -1{,}3$

21. Ratkaise yhtälö $\sin\alpha\cos\alpha = 0$.

22. Mikä funktion arvojoukko on?

a) $2\sin\alpha$ b) $-2\sin\alpha$
c) $3 + 2\sin\alpha$ d) $5 - 2\sin\alpha$

23. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $3 + \sin\alpha = a$ on ratkaisuja?

24. Määritä kulman α sinin tarkka arvo, kun

a) $\cos\alpha = \frac{9}{41}$ ja $270° < \alpha < 360°$

b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ ja $90° < \alpha < 180°$.

25. Laske lausekkeen $\cos^3 2\alpha + \sin 3\alpha$ arvo, kun a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = 30°$.

26. Kulman 2α sinille pätee taulukkokirjoissa oleva niin sanottu kaksinkertaisen kulman kaava:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Kaavan perusteleminen erikoistapauksessa $0° < \alpha < 90°$ on seuraavana tehtävänä 27.

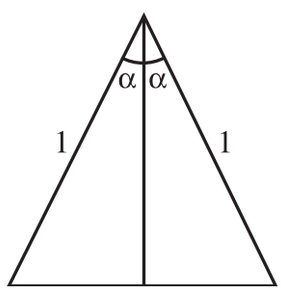
a) Tutustu kaavaan laskemalla sen avulla
$\sin 90° = \sin(2 \cdot 45°)$ ja
$\sin 270° = \sin(2 \cdot 135°)$.

b) Määritä $\sin 2\alpha$, kun $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.

c) Määritä $\sin 2\alpha$, kun $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ja $90° < \alpha < 180°$.

d) Määritä $\sin 2\alpha$, kun $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ ja $180° < \alpha < 270°$.

27. Kurssissa Geometria on johdettu ns. kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Kaavassa kulma γ on kolmion sivujen a ja b välinen kulma. Laske kuvion tasakylkisen kolmion pinta-ala kahdella tavalla ja perustele kulmille $0° < \alpha < 90°$ kaksinkertaisen kulman sinin kaava $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.



SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

28. Missä neljänneksessä kulman loppukylki on, jos alkukylki on positiivinen x-akseli? Minkä merkkiset kulman kosini ja sini ovat?

a) $350°$ b) $1040°$
c) $-200°$ d) $-670°$

29. Ratkaise yhtälö.

a) $\cos\alpha = -1$ b) $\sin\alpha = -1$
c) $\sin\alpha = \frac{3}{2}$

30. Ratkaise yhtälö.

a) $\sin^2\alpha = 1$ b) $\cos^2\alpha = 1$

31. Mikä funktion arvojoukko on?

a) $\sin^2\alpha$ b) $4 - 3\sin^2\alpha$

32. Mikä on funktion suurin ja mikä pienin arvo?

a) $5\cos\alpha$ b) $7 + 5\cos\alpha$
c) $3 - 5\cos\alpha$

33. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $a + \sin\alpha = 1$ on ratkaisuja?

34. Määritä kulman α kosinin tarkka arvo, kun

a) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$ ja $90° < \alpha < 180°$

b) $\sin\alpha = -\frac{3}{8}$ ja $-90° < \alpha < 0°$.

35. Laske lausekkeen $\sin^3 2\alpha + \cos^2 3\alpha$ arvo, kun a) $\alpha = 135°$ b) $\alpha = 15°$.

36. Sievennä lauseke.

a) $\sin^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha$
b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

37. Taulukkokirjoissa on kulman 2α kosinin kaavalle kolme eri muotoa.

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ja
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Kaavojen perusteleminen erikoistapauksessa $0° < \alpha < 90°$ on tehtävänä 39.

a) Tutustu kaavoihin laskemalla kaavan jonkin muodon avulla $\cos 120° = \cos(2 \cdot 60°)$.
Laske edelleen $\cos 2\alpha$, kun

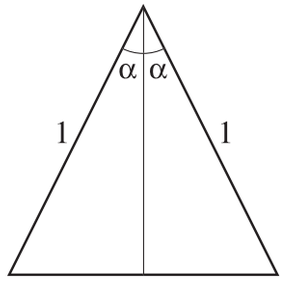
b) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ c) $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{15}}$.

38. Käytä hyväksi tarkkoja arvoja

$\cos 30° = \cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja edellisen tehtävän kaavoja ja määritä a) $\cos 15°$ ja $\cos 165°$
b) $\sin 15°$ ja $\sin 165°$.

39. a) Jos tunnetaan kolmion kaksi sivua a ja b ja niiden välinen kulma γ, niin kosinilauseen mukaan kolmannen sivun c pituuden neliö voidaan laskea kaavalla $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
Laske alla olevan tasakylkisen kolmion kannan pituuden neliö kosinilauseella ja suorakulmaisten kolmioiden avulla ja perustele kulmille $0° < \alpha < 90°$ kaksinkertaisen kulman kosinin kaava

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.



Johda edelleen kaavasta $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ kaava

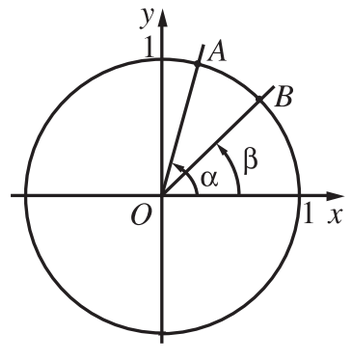
b) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
c) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

40. Taulukkokirjoissa on kaavat kahden kulman summan ja erotuksen sinille ja kosinille.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Laske kaavojen avulla
a) $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$
b) $\cos 75°$.
c) Laske $\sin(\alpha + \beta)$ ja $\cos(\alpha - \beta)$, kun $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $90° < \alpha < 180°$ ja $0° < \beta < 90°$.

41. a) Määritä kulmien α ja β kehäpisteiden A ja B paikkavektorit $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$.



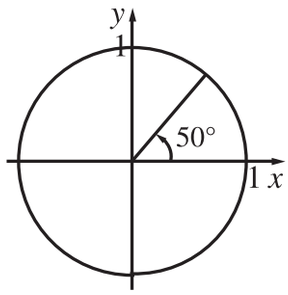
b) Perustele edellisessä tehtävässä oleva erotuskulman kosinin kaava laskemalla kulman $\alpha - \beta$ kosini vektoreiden $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ pistetulon avulla.

Kulman ratkaiseminen

Ongelma

a) Määritä neljä kulmaa, joiden kaikkien loppukyljet eivät ole samassa neljänneksessä ja joiden kosini on yhtä suuri kuin 50°:n kulman kosini.

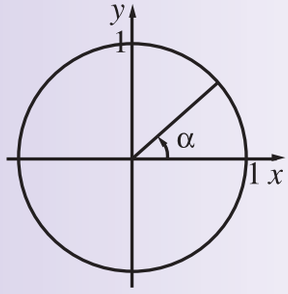
b) Määritä neljä kulmaa, joiden kaikkien loppukyljet eivät ole samassa neljänneksessä ja joiden sini on yhtä suuri kuin 50°:n kulman sini.



Symmetriakaavat

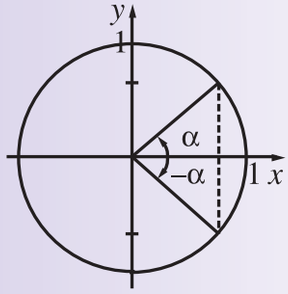
Jos kehäpisteet eivät ole koordinaattiakseleilla, trigonometrisiä yhtälöitä ratkaistaessa tarvitaan symmetriakaavoja, jotka saadaan, kun kulman loppukylki peilataan x- ja y-akselin suhteen.

Oletetaan, että kulma α on koordinaatistossa niin, että kulman kärki on origossa ja kulman alkukylki on positiivinen x-akseli.



Peilaus x-akselin suhteen

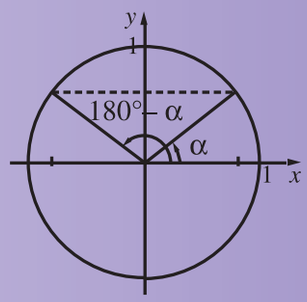
Kun kulman α loppukylki peilataan x-akselin suhteen, saadaan kulman α vastakulma $-\alpha$. Kulman $-\alpha$ kehäpisteen x-koordinaatti on sama kuin kulman α kehäpisteen x-koordinaatti. Kulman $-\alpha$ kehäpisteen y-koordinaatti on kulman α kehäpisteen y-koordinaatin vastaluku. Siis:



$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Peilaus *y*-akselin suhteen

Kun kulman α loppukylki peilataan y-akselin suhteen, saadaan kulman α suplementtikulma $180° - \alpha$. Kulman $180° - \alpha$ kehäpisteen x-koordinaatti on kulman α kehäpisteen x-koordinaatin vastaluku, ja kulman $180° - \alpha$ kehäpisteen y-koordinaatti on sama kuin kulman α kehäpisteen y-koordinaatti. Siis:



$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha.$$

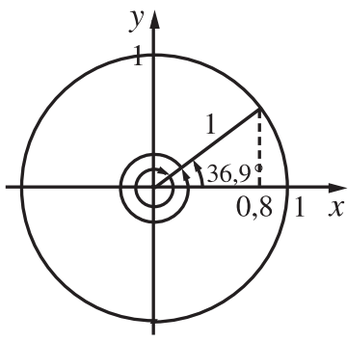
JOHDANTOESIMERKKI 1

Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella kaikki kulmat α, jotka toteuttavat yhtälön $\cos\alpha = 0{,}8$.

Ratkaisu

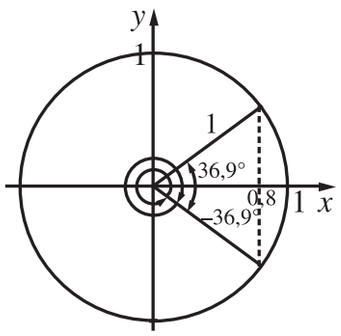
Laskimen näppäimellä $\boxed{\cos^{-1}}$ saadaan yksi kulma, jonka kosini on 0,8. Asteen kymmenesosan tarkkuudella kulma on 36,9°.
Jos 36,9°:n kulmaan lisätään täysikulman 360° positiivisia tai negatiivisia monikertoja, saadaan aina sama kehäpiste. Siis yhtälön $\cos\alpha = 0{,}8$ toteuttavat kaikki kulmat

$\alpha \approx 36{,}9° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.



Kulman 36,9° vastakulmalla –36,9° on sama kosinin arvo 0,8. Jos kulmaan –36,9° lisätään täysikulman 360° positiivisia tai negatiivisia monikertoja, saadaan aina uusia kulmia, joiden kosini on 0,8.
Näin saadaan toinen ääretön parvi yhtälön ratkaisuja:

$\alpha \approx -36{,}9° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.



Vastaus

$\alpha \approx 36{,}9° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx -36{,}9° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

JOHDANTOESIMERKKI 2

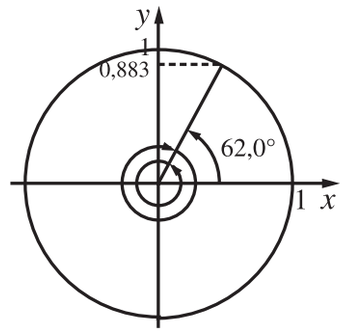
Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella kaikki kulmat α, jotka toteuttavat yhtälön $\sin\alpha = 0{,}883$.

Ratkaisu

Laskimen näppäimellä $\boxed{\sin^{-1}}$ saadaan yksi kulma, jonka sini on 0,883. Asteen kymmenesosan tarkkuudella kulma on 62,0°. Siis kaikkien kulmien

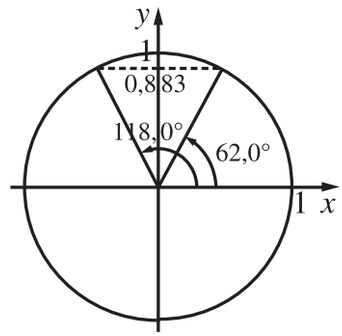
$\alpha \approx 62{,}0° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku,

sini on 0,833.



Kulman 62,0° suplementtikulmalla $180° - 62{,}0° = 118{,}0°$ on sama sinin arvo 0,883. Siis yhtälön $\sin\alpha = 0{,}833$ toteuttavat myös kaikki kulmat

$\alpha \approx 118{,}0° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.

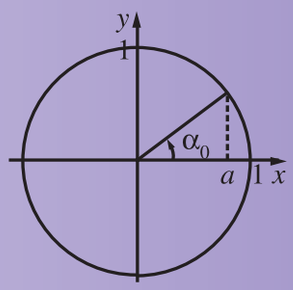


Vastaus

$\alpha \approx 62{,}0° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 118{,}0° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

Yhtälö $\cos\alpha = a$

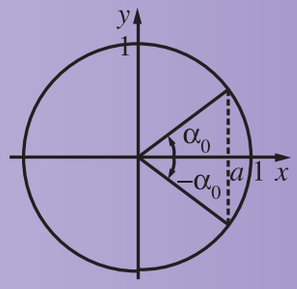
Olkoon α_0 yksi kulma, jonka kosinin arvo on a eli joka toteuttaa yhtälön $\cos\alpha = a$.



Kaikilla kulmilla, jotka saadaan, kun kulmaan α_0 lisätään $360°$:n positiivisia tai negatiivisia monikertoja, kosinin arvo on a. Nämä kulmat ovat muotoa

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.

Kulman α_0 vastakulmalla $-\alpha_0$ on sama kosinin arvo a. Kaikilla kulmilla, jotka saadaan, kun kulmaan $-\alpha_0$ lisätään $360°$:n positiivisia ja negatiivisia monikertoja, kosinin arvo on a. Nämä kulmat ovat muotoa



$\alpha = -\alpha_0 + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.

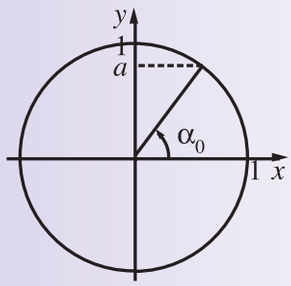
Yhtälön $\cos\alpha = a$ ratkaisu

Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön $\cos\alpha = a$, niin yhtälön ratkaisu on

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -\alpha_0 + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.

Yhtälö $\sin\alpha = a$

Olkoon α_0 yksi kulma, jonka sinin arvo on a eli joka toteuttaa yhtälön $\sin\alpha = a$.

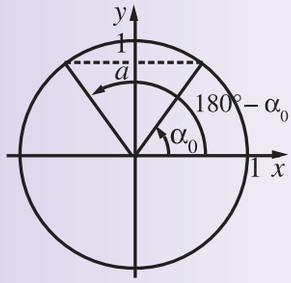


Kaikilla kulmilla, jotka saadaan, kun kulmaan α_0 lisätään $360°$:n positiivisia tai negatiivisia monikertoja, sinin arvo on a. Nämä kulmat ovat muotoa

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.

Kulman α_0 suplementtikulmalla $180° - \alpha_0$ on sama sinin arvo a. Kaikilla kulmilla, jotka saadaan, kun kulmaan $180° - \alpha_0$ lisätään $360°$:n positiivisia tai negatiivisia monikertoja, sinin arvo on a. Nämä kulmat ovat muotoa

$\alpha = 180° - \alpha_0 + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.



Yhtälön $\sin\alpha = a$ ratkaisu

Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön $\sin\alpha = a$, niin yhtälön ratkaisu on

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$ tai $\alpha = 180° - \alpha_0 + n \cdot 360°$, n kokonaisluku.

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $2\cos\alpha + 1 = 0$.

Ratkaisu

$2\cos\alpha + 1 = 0$ Ratkaistaan ensin $\cos\alpha$.

$2\cos\alpha = -1 \quad | : 2$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ Yksi kulma, jonka kosini on $-\frac{1}{2}$, on $120°$.

$\alpha = 120° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -120° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

Vastaus

$\alpha = 120° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -120° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

ESIMERKKI 4

Ratkaise yhtälö $\sin\alpha = -0{,}321$ asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu

$\sin\alpha = -0{,}321$ Laskimella saadaan yksi yhtälön toteuttava kulma $\alpha_0 \approx -18{,}7°$.

$\alpha \approx -18{,}7° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 180° - (-18{,}7°) + n \cdot 360°$

$\alpha \approx -18{,}7° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 198{,}7° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

Vastaus

$\alpha \approx -18{,}7° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 198{,}7° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

ESIMERKKI 5

a) Ratkaise yhtälö $2\cos 3\alpha - 1 = 0$.
b) Mitkä yhtälön juurista ovat välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$?

Ratkaisu

a) $2\cos 3\alpha - 1 = 0$ Yhtälöstä ratkaistaan ensin $\cos 3\alpha$.

$2\cos 3\alpha = 1 \quad | : 2$

$\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$ Yksi kulma, jonka kosini on $\frac{1}{2}$, on $60°$.

$3\alpha = 60° + n \cdot 360° \quad$ tai $\quad 3\alpha = -60° + n \cdot 360° \quad | : 3$ Jaetaan termeittäin.

$\alpha = \frac{60°}{3} + n \cdot \frac{360°}{3} \quad$ tai $\quad \alpha = \frac{-60°}{3} + n \cdot \frac{360°}{3}$

$\alpha = 20° + n \cdot 120° \quad$ tai $\quad \alpha = -20° + n \cdot 120°$, n kokonaisluku

b) Kummassakin ratkaisuparvessa juuret seuraavat toisiaan $120°$:n välein. Ensimmäisen ratkaisuparven $20° + n \cdot 120°$ juurista välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ ovat:

$20°$

$20° + 1 \cdot 120° = 140°$

$20° + 2 \cdot 120° = 260°$.

Toisen parven $-20° + n \cdot 120°$ juurista välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ ovat:

$-20° + 1 \cdot 120° = 100°$

$-20° + 2 \cdot 120° = 220°$

$-20° + 3 \cdot 120° = 340°$.

Yhtälön välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ olevat juuret ovat

$20°,\ 100°,\ 140°,\ 220°,\ 260°$ ja $340°$.

Vastaus

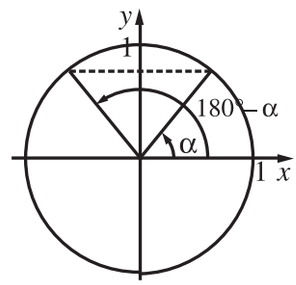
a) $\alpha = 20° + n \cdot 120°$ tai $\alpha = -20° + n \cdot 120°$, n kokonaisluku
b) $20°,\ 100°,\ 140°,\ 220°,\ 260°$ ja $340°$

ESIMERKKI 6

Ratkaise yhtälö $\sin 2\alpha = \sin \alpha$.

Ratkaisu

Kulmalla 2α on yhtä suuri sini kuin kulmalla α, jos ja vain jos kulmalla 2α on sama kehäpiste kuin kulmalla α tai kulman α suplementtikulmalla $180° - \alpha$.



Siis yhtälö $\sin 2\alpha = \sin \alpha$ toteutuu, jos ja vain jos kulma 2α saadaan lisäämällä täysikulman $360°$ monikerta kulmaan α tai $180° - \alpha$.

$\sin 2\alpha = \sin \alpha$

$2\alpha = \alpha + n \cdot 360°$ tai $2\alpha = 180° - \alpha + n \cdot 360°$ Ratkaistaan yhtälöistä α.

$\alpha = n \cdot 360°$ tai $3\alpha = 180° + n \cdot 360°$ Jälkimmäinen yhtälö jaetaan termeittäin 3:lla.

$\alpha = n \cdot 360°$ tai $\alpha = 60° + n \cdot 120°$, n kokonaisluku

Vastaus

$\alpha = n \cdot 360°$ tai $\alpha = 60° + n \cdot 120°$, n kokonaisluku

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

42. Määritä jokin kulma, jonka
a) sini on yhtä suuri kuin kulman $75°$ sini ja jolla on eri kehäpiste kuin kulmalla $75°$
b) sini on kulman $75°$ sinin vastaluku
c) kosini on yhtä suuri kuin kulman $110°$ kosini ja jolla on eri kehäpiste kuin kulmalla $110°$
d) kosini on kulman $110°$ kosinin vastaluku.

43. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.
a) $\cos \alpha = 0{,}49$ b) $\sin \alpha = 0{,}37$
c) $\sin \alpha = -0{,}55$

44. Ratkaise yhtälö.
a) $\sin \alpha = \sin 50°$ b) $\cos \alpha = \cos 75°$

45. Määritä kaikki kulmat, joiden
a) kosini on $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) sini on $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Kosinin ja sinin tarkkoja arvoja on taulukkokirjassa ja tehtävissä 8 ja 15 sivuilla 15 ja 16.

46. Ratkaise asteen tarkkuudella yhtälö $\cos 4\alpha = 0{,}24$. Mitkä yhtälön juurista ovat välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 270°$?

47. Ratkaise yhtälö.
a) $3 \cos \alpha = 1{,}5$ b) $\cos 3\alpha = 1{,}5$

48. Ratkaise yhtälö $2 \sin 3\alpha + 1 = 0$.

49. Ratkaise yhtälö $2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0$.

50. Ratkaise yhtälö $\sin 3\alpha = \sin \alpha$.

51. Ratkaise yhtälö $\cos 4\alpha = \cos 2\alpha$. Mitkä yhtälön juurista ovat välillä $[-180°, 180°]$?

52. Ratkaise yhtälö $\sin (\alpha + 30°) = \sin \alpha$.

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

53. Oletetaan, että kulma α ei ole kulman $90°$ monikerta. Määritä kaikki kulmat β, joiden
a) sini on yhtä suuri kuin kulman α sini ja joiden kehäpiste on eri kuin kulman α kehäpiste
b) kosini on yhtä suuri kuin kulman α kosini ja joiden kehäpiste on eri kuin kulman α kehäpiste.

54. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.
a) $\sin \alpha = 0{,}21$ b) $\cos \alpha = -0{,}32$

55. Kulman $150°$ kosini on $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Määritä kaikki kulmat, joiden kosini on $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

56. Millä kulmilla on sama sini kuin kulmalla $110°$? Mitkä näistä kulmista ovat välillä $[-360°, 360°]$?

57. Ratkaise yhtälö.
a) $\sin \alpha - 1 = 0$
b) $\sin 2\alpha - 1 = 0$
c) $2 \sin \alpha - 1 = 0$

58. Ratkaise yhtälö.
a) $\cos \frac{\alpha}{6} = 0$
b) $6 \cos \frac{\alpha}{6} = 3$

59. Määritä asteen tarkkuudella kaikki välin $[-90°, 90°]$ kulmat, jotka toteuttavat yhtälön $5 \sin 6\alpha - 3 = 0$.

60. Ratkaise yhtälö.
a) $2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha = 0$
b) $4 \cos^2 \alpha = 3$

61. Ratkaise yhtälö.
a) $\sin 5\alpha = \sin 3\alpha$
b) $\cos 3\alpha = \cos \alpha$

62. Ratkaise yhtälö $\cos(3\alpha + 40°) = \cos \alpha$.

63. Huvipuiston maailmanpyörän keskipiste on 12 metrin korkeudessa, ja pyörän halkaisija on 20 metriä. Pyörä pyörähtää yhden kierroksen 30 sekunnissa.
a) Muodosta lauseke, joka ilmaisee, millä korkeudella Visan istuin on t sekuntia sen jälkeen, kun istuin on ylöspäin mennessään ollut pyörän keskipisteen tasalla.
b) Minä ajanhetkinä Visan istuin on 16 metrin korkeudessa?

64. Määritä kaikki kulmat β, joiden
a) sini on yhtä suuri kuin kulman α sinin vastaluku
b) kosini on yhtä suuri kuin kulman α kosinin vastaluku.

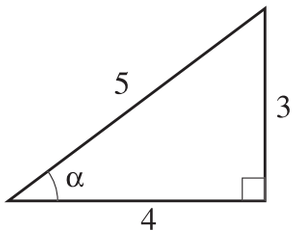
65. Ratkaise yhtälö.
a) $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$
b) $\cos 2\alpha = -\cos \alpha$

66. Ratkaise yhtälö.
a) $\sin (45° - 3\alpha) = -\sin 2\alpha$
b) $\cos (30° - \alpha) + \cos \alpha = 0$

Tangentti

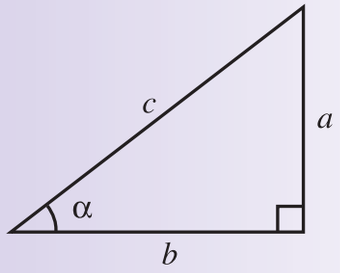
Ongelma

Suorakulmaisessa kolmiossa terävän kulman α tangentti on kulman α vastaisen kateetin pituuden suhde viereisen kateetin pituuteen. Määritä kuvion kulman α sini, kosini ja tangentti. Vertaa suhdetta $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ kulman α tangenttiin.



Tavoitteena on määritellä suunnatun kulman tangentti.

Suorakulmaisessa kolmiossa terävän kulman tangentti on kulman vastaisen kateetin pituuden suhde viereisen kateetin pituuteen.



Viereisessä kolmiossa $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

Kolmiossa on $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ ja $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Lasketaan suhde $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a\cancel{c}^{1}}{\cancel{c}_{1}b} = \frac{a}{b}$$

Siis

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Suorakulmaisessa kolmiossa terävän kulman tangentti on kulman sini jaettuna kulman kosinilla. Tämä havainto on lähtökohtana, kun määritellään suunnatun kulman α tangentti.

Suunnatun kulman tangentin määritelmä

Suunnatun kulman α *tangentti* on kulman α sini jaettuna kulman α kosinilla.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Koska nollalla ei voi jakaa, kulman α tangentti ei ole määritelty, kun $\cos\alpha = 0$. Kulmat, joiden kosini on nolla, ovat kulmat $90° + n \cdot 180°$, missä n on kokonaisluku.

Tangentin määrittelyehto

$\tan\alpha$ on määritelty, kun $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$, missä n on kokonaisluku.

ESIMERKKI 1

Määritä kulman α tangentti, kun tiedetään, että $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ ja $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

Ratkaisu Tangentti on sini jaettuna kosinilla:

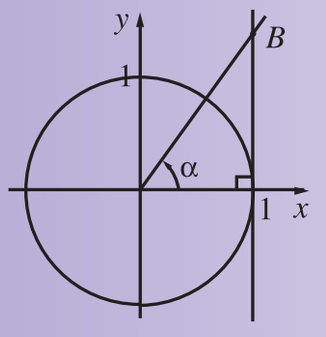
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{5}{13} : \frac{12}{13} = -\frac{5}{\cancel{13}^{1}} \cdot \frac{\cancel{13}^{1}}{12} = -\frac{5}{12}.$$

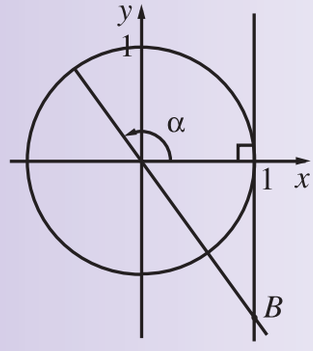
Vastaus $-\frac{5}{12}$

Kulman α tangentti voidaan määritellä myös geometrisesti.

Piirretään y-akselin suuntainen suora, joka kulkee pisteen $(1, 0)$ kautta. Suora sivuaa yksikköympyrää, eli suora on yksikköympyrän tangentti.

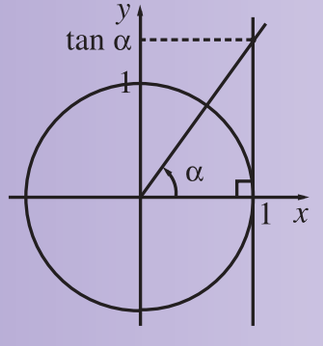
Asetetaan kulma α koordinaatistoon niin, että kulman kärki on origossa ja alkukylki on positiivinen x-akseli. Kulman α loppukylki tai sen jatke leikkaa suoran pisteessä B. Piste B on kulman α *tangenttipiste*.

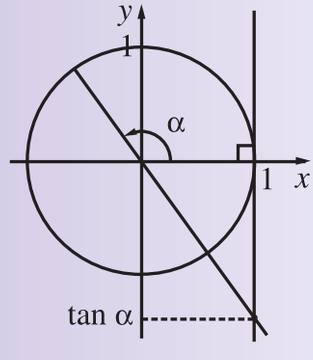




Tangentin geometrinen määritelmä

Kulman α tangentti on kulman α tangenttipisteen y-koordinaatti.*





Jos kulman α loppukylki on y-akselilla, niin loppukylki ei leikkaa suoraa. Kulmat, joiden loppukylki on y-akselilla, ovat kulmat $90° + n \cdot 180°$. Tangentille saatiin geometrisella tarkastelulla sama määrittelyehto kuin edellä:

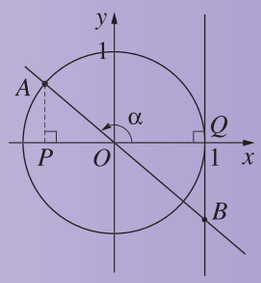
$\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.

---

* Sana tangentti tulee latinan sanasta *tangens*, koskettava.

Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla nähdään, että geometrinen määritelmä yhtyy ensimmäiseen määritelmään $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Oletetaan esimerkiksi, että kulman α loppukylki on II neljänneksessä. Tällöin geometrisen määritelmän mukaan $QB = -\tan\alpha$. Edelleen on $PA = \sin\alpha$ ja $OP = -\cos\alpha$. Koska kolmiot OPA ja OQB ovat yhdenmuotoiset, niin:



$$\frac{QB}{OQ} = \frac{PA}{OP}$$

$$\frac{-\tan\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} \qquad \big| \cdot (-1)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Tangentin arvojoukko

Tangentin geometrisesta määritelmästä ilmenee, että kulman tangentti voi olla mikä tahansa reaaliluku. Funktion $\tan\alpha$ arvojoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

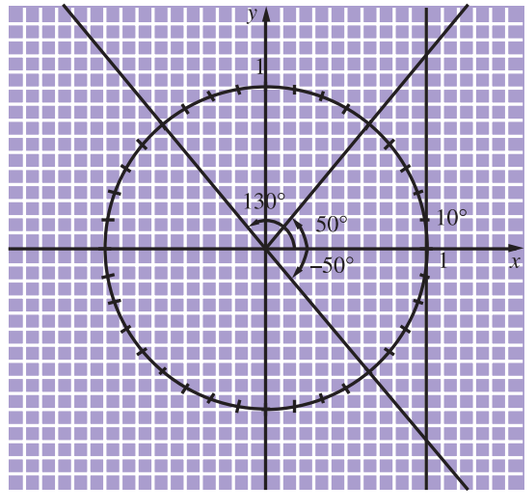
ESIMERKKI 2

Määritä kuviosta yhden desimaalin tarkkuudella $\tan\alpha$, kun

a) $\alpha = 50°$

b) $\alpha = -50°$

c) $\alpha = 130°$.



Ratkaisu

a) Kulman $50°$ tangenttipisteen y-koordinaatti on noin $1{,}2$.
Siis $\tan 50° \approx 1{,}2$.

b) Kulman $-50°$ tangenttipiste sijaitsee symmetrisesti x-akselin alapuolella. Siis $\tan(-50°) \approx -1{,}2$.

c) Kulmalla $130°$ on sama tangenttipiste kuin kulmalla $-50°$.
Siis $\tan 130° \approx -1{,}2$.

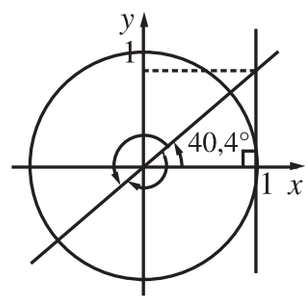
Vastaus a) $1{,}2$ b) $-1{,}2$ c) $-1{,}2$

JOHDANTOESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $\tan\alpha = 0{,}85$ asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu

Laskimen näppäimellä $\boxed{\tan^{-1}}$ saadaan yksi kulma, jonka tangentti on $0{,}85$. Asteen kymmenesosan tarkkuudella kulma on $40{,}4°$. Tämän kulman tangenttipisteen y-koordinaatti on $0{,}85$.
Jos kulmaan $40{,}4°$ lisätään oikokulman $180°$ positiivisia tai negatiivisia monikertoja, saadaan aina sama tangenttipiste. Siis yhtälö $\tan\alpha = 0{,}85$ toteutuu, kun



$\alpha \approx 40{,}4° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.

Vastaus $\alpha \approx 40{,}4° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

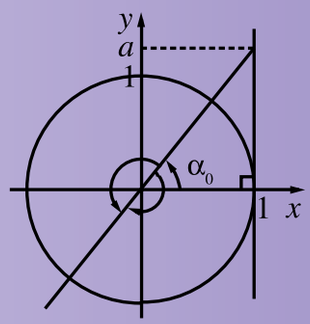
Yhtälön $\tan\alpha = a$ ratkaisu

Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön $\tan\alpha = a$, niin kaikki kulmat, jotka toteuttavat yhtälön, saadaan lisäämällä kulmaan α_0 oikokulman $180°$ monikertoja.

Siis yhtälön $\tan\alpha = a$ ratkaisu on

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180°, \ n \text{ kokonaisluku},$$

missä α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön.



ESIMERKKI 4

Ratkaise asteen kymmenesosan tarkkuudella yhtälö $3\sin\alpha - 7\cos\alpha = 0$.

Ratkaisu

Yhtälö voidaan saattaa muotoon $\tan\alpha = a$.

$$3\sin\alpha - 7\cos\alpha = 0$$

$$3\sin\alpha = 7\cos\alpha \qquad \big| : 3\cos\alpha \neq 0$$

Yhtälö ei toteudu, kun $\cos\alpha = 0$, sillä silloin on $\sin\alpha = 1$ tai $\sin\alpha = -1$.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\sin\alpha}{\underset{1}{\cancel{3}}\cos\alpha} = \frac{7\overset{1}{\cancel{\cos\alpha}}}{3\underset{1}{\cancel{\cos\alpha}}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{7}{3}$$

Yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön, on $\alpha_0 \approx 66{,}8°$.

$$\alpha \approx 66{,}8° + n \cdot 180°, \ n \text{ kokonaisluku}$$

Vastaus

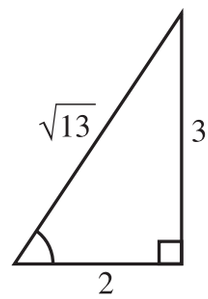
$\alpha \approx 66{,}8° + n \cdot 180°, \ n$ kokonaisluku

ESIMERKKI 5

Määritä $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$, kun tiedetään, että $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$ ja $90° < \alpha < 180°$.

Ratkaisu

Lasketaan ensin tangentin, sinin ja kosinin itseisarvoilla. Piirretään mallikuvaksi suorakulmainen kolmio, jonka toisen terävän kulman tangentti on $\frac{3}{2}$.



Kateettien pituuksiksi voidaan valita esimerkiksi 3 ja 2. Kolmion hypotenuusan pituus on silloin $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, ja saman terävän kulman sini on $\frac{3}{\sqrt{13}}$ ja kosini $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Kulman α sinin itseisarvo on $\frac{3}{\sqrt{13}}$ ja kosinin itseisarvo $\frac{2}{\sqrt{13}}$, joten

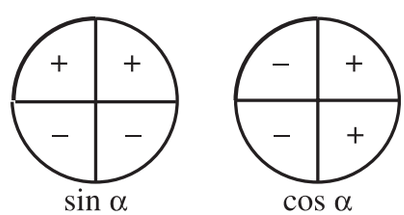
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{tai} \quad \sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

ja

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \text{tai} \quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Valitaan kulman α sinille ja kosinille oikeat merkit. Koska α on toisessa neljänneksessä, kulman α sini on positiivinen ja kosini negatiivinen:

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}.$$



Vastaus

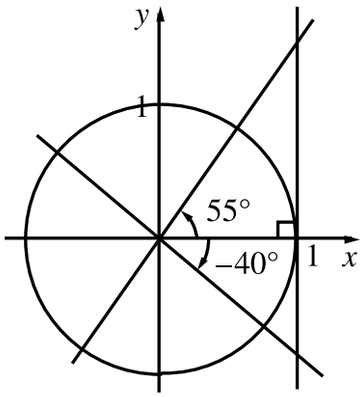
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

TEHTÄVIÄ

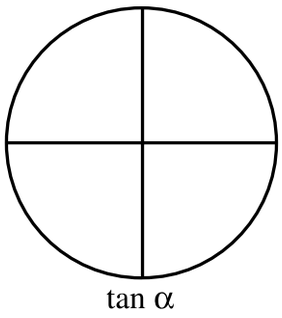
SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

67. Määritä kulman α tangentti, kun tiedetään, että $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ ja $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$.

68. Määritä kuvion avulla kaikki välin $[-360°, 360°]$ kulmat, joilla on sama tangentti kuin kulmalla a) $55°$ b) $-40°$.



69. Täydennä ympyrä tangentin merkeillä eri neljänneksissä.



70. Määritä kaikki kulmat, joiden tangentti on nolla.

71. Täydennä taulukko.
Katso tehtävä 8 sivulla 15.

α	$\tan\alpha$
$45°$	
$135°$	
$225°$	
$315°$	

72. Määritä kaikki kulmat, joiden tangentti on
a) 1 b) -1.

73. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.
a) $\tan\alpha = 0{,}63$
b) $\tan\alpha = -1{,}67$
c) $\tan 4\alpha = -8$

74. Ratkaise yhtälö asteen kymmenesosan tarkkuudella.
a) $2\sin\alpha = \cos\alpha$ b) $3\sin\alpha + 4\cos\alpha = 0$

75. Määritä kulman α sini ja kosini, kun $\tan\alpha = \frac{21}{20}$ ja
a) $0° < \alpha < 90°$ b) $180° < \alpha < 270°$.

76. Määritä kulman α kosini ja tangentti, kun $\sin\alpha = \frac{12}{37}$ ja $90° < \alpha < 180°$.

77. Kulma α toteuttaa yhtälön $\sin\alpha + 3\cos\alpha = 0$ ja $270° < \alpha < 360°$.
Määritä kulman α sinin ja kosinin tarkat arvot.

78. Ratkaise yhtälö $\tan(3\alpha + 40°) = \tan\alpha$.
Mitkä yhtälön juurista ovat välillä $[0°, 360°]$?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

79. Määritä

a) $\tan\alpha$, kun $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ja $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

b) $\sin\alpha$, kun $\tan\alpha = 3$ ja $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

80. Täydennä taulukko tangentin tarkoilla arvoilla. Katso tehtävä 15 sivulla 16.

a)

α	$\tan\alpha$
60°	
120°	
240°	
300°	

b)

α	$\tan\alpha$
30°	
150°	
210°	
330°	

81. Määritä kaikki kulmat α, joille

a) $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\tan\alpha = -\sqrt{3}$.

82. Ratkaise yhtälö $3\tan^2\alpha - 1 = 0$.

83. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.

a) $\tan\alpha = 7$ b) $\tan\alpha = -0{,}8$

84. Ratkaise asteen tarkkuudella yhtälö $3\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0$.

85. Ratkaise yhtälö.

a) $\sin\alpha = \cos\alpha$

b) $\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

86. Millä α:n arvoilla funktio ei ole määritelty?

a) $\tan 2\alpha$

b) $\tan(2\alpha + 30°)$

87. Määritä asteen tarkkuudella yhtälön $\tan 3\alpha = 2$ välillä $[-90°, 90°]$ olevat juuret.

88. Määritä kulman α sinin ja kosinin tarkat arvot, kun $\tan\alpha = -2$ ja $270° < \alpha < 360°$.

89. Määritä kulman α sinin ja tangentin tarkat arvot, kun $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ ja $-90° < \alpha < 0°$.

90. Kulma α toteuttaa yhtälön $5\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$. Määritä kulman α sinin ja kosinin tarkat arvot.

91. Mikä yhtälön määrittelyjoukko on? Ratkaise yhtälö.

a) $\tan 2\alpha = \tan(\alpha + 90°)$

b) $\tan 2\alpha = \tan(90° - \alpha)$

92. Suunnatun kulman α *sekantti* $\sec\alpha$ ja *kosekantti* $\csc\alpha$ määritellään:

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ ja $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Selvitä funktioiden $\sec\alpha$ ja $\csc\alpha$ määrittelyjoukot ja todista seuraavat kaavat.

a) $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

c) $\sec^2\alpha + \csc^2\alpha = \sec^2\alpha\,\csc^2\alpha$

93. Kulman α niin sanottu kotangentti määritellään geometrisesti seuraavasti:
Piirretään x-akselin suuntainen suora, joka kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta. Asetetaan kulma α koordinaatistoon niin, että kulman kärki on origossa ja alkukylki on positiivinen x-akseli. Kulman α loppukylki tai sen jatke leikkaa suoran pisteessä C. Kulman α *kotangentti* on pisteen C x-koordinaatti. Kulman α kotangentti merkitään $\cot \alpha$.
a) Millä α:n arvoilla kotangentti ei ole määritelty?
b) Kaikilla määrittelyjoukossa olevilla suunnatuilla kulmilla α pätee $\cot \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Todista kaava sellaisille kulmille α, joiden loppukylki on neljännessä neljänneksessä.

94. Kulman 2α tangentti saadaan kulman α tangentista taulukkokirjoissa olevalla kaavalla

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

a) Todista kaava. Käytä hyväksi kaksinkertaisen kulman kaavoja $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ja $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.
b) Kulmien $45°$ ja $225°$ tangentin arvo on 1. Määritä $22{,}5°$:n kulman ja $112{,}5°$:n kulman tangentin tarkka arvo.

Radiaani

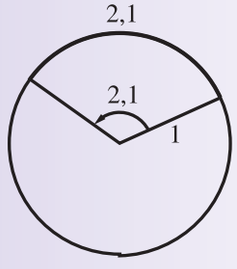
Ongelma Kuinka pitkä yksikköympyrän kaari on, jos kaaren keskuskulman suuruus on a) 360° b) 180° c) 60°? Anna vastaukseksi kaaren pituuden tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.

Jos ympyrään piirretään keskuskulmia, niin keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus on suoraan verrannollinen keskuskulman suuruuteen. Kaaren pituutta voi siis käyttää kulman suuruuden mittana. Jos ympyrän säteen pituus on yksi, saadaan kulman suuruuden yksikkö, josta käytetään nimitystä radiaani.

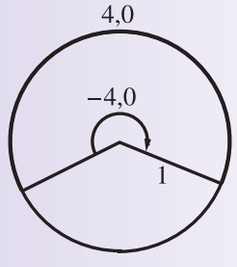
Kulman yksikön radiaani määritelmä

Positiivisen kulman suuruus *radiaaneina* on kulmaa vastaavan yksikköympyrän kaaren pituus. Negatiivisen kulman suuruus radiaaneina on kaaren pituuden vastaluku.*

Kulmaa vastaava yksikköympyrän kaari on pituudeltaan 2,1, ja kulma on positiivinen. Kulman suuruus on 2,1 radiaania.



Kulmaa vastaava yksikköympyrän kaari on pituudeltaan 4,0, ja kulma on negatiivinen. Kulman suuruus on –4,0 radiaania.



---

* Sana radiaani tulee latinan sanasta *radius*, joka tarkoittaa sädettä. Yksikköympyrän säteen pituus on 1, joten kulman suuruus radiaaneina ilmaisee, kuinka monen yksikköympyrän säteen pituinen kulmaa vastaava yksikköympyrän kaari on. Koska kaikki ympyränsektorit, joiden keskuskulmat ovat yhtä suuret, ovat keskenään yhdenmuotoiset, keskuskulman suuruus radiaaneina ilmaisee kaikissa ympyröissä, kuinka monen säteen suuruinen kulmaa vastaava kaari on.

Kun kulman suuruus ilmaistaan radiaaneina, niin yleensä ei käytetä mitään yksikkömerkintää.

Ilmaisussa ”yhtälön toteuttaa kulma $x \approx 2{,}1$” kulman x suuruuden likiarvo on ilmaistu radiaaneina.

Lauseke $\cos 4{,}5$ tarkoittaa 4,5 radiaanin suuruisen kulman kosinia.

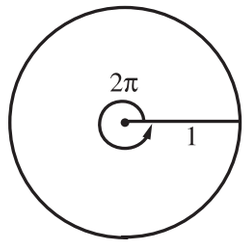
Radiaania kutsutaan usein kulman suuruuden *luonnolliseksi yksiköksi.* Nimitys johtuu siitä, että monet sinin, kosinin ja tangentin syvällisemmät matemaattiset ominaisuudet saavat yksinkertaisimman muodon, kun kulman yksikkönä on radiaani. Tämä tullaan huomaamaan myöhemmin tässä kurssissa.

ESIMERKKI 1

Ilmaise radiaaneina a) täysikulman b) oikokulman c) suorakulman suuruus.

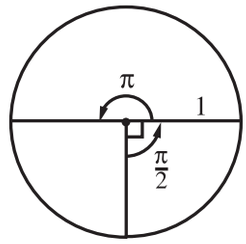
Ratkaisu

a) Täysikulmaa vastaava yksikköympyrän kaari on koko ympyrän kehä. Kehän pituus on $2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Siis täysikulma on $2\pi \approx 6{,}28$ radiaania.



b) Oikokulmaa vastaava kaari on puoliympyrä. Puoliympyrän kaaren pituus on π. Oikokulman suuruus radiaaneina on $\pi \approx 3{,}14$.

c) Suorakulmaa vastaava kaari on puolet puoliympyrästä. Kaaren pituus on $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.



Vastaus

a) $2\pi \approx 6{,}28$ b) $\pi \approx 3{,}14$ c) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

Yksikkömuunnokset radiaaneista asteisiin ja toisin päin

Lähtökohtana yksikkömuunnoksille kannattaa yleensä pitää yksikköympyrän puoliympyrän kaaren pituutta π. Siis:

π radiaania on $180°$

$180°$ on π radiaania.

ESIMERKKI 2

Mikä kulman suuruus on asteina, jos kulman suuruus radiaaneina on

a) 1 b) $-5{,}2$ c) $\frac{\pi}{6}$?

Ratkaisu

a) Koska π radiaania on $180°$, niin yhden radiaanin suuruisen kulman asteluku on

$$\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}296°.$$

b) Lähdetään liikkeelle oikokulmasta ja edetään yhden radiaanin kautta.

π radiaania on $180°$.

1 radiaani on $\frac{180°}{\pi}$.

$-5{,}2$ radiaania on $-5{,}2 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx -297{,}9°$.

c) Lähdetään liikkeelle oikokulmasta.

π radiaania on $180°$.

$\frac{\pi}{6}$ radiaania on $\frac{180°}{6} = 30°$.

Vastaus

a) noin $57{,}296°$ b) noin $-297{,}9°$ c) $30°$

ESIMERKKI 3

Mikä kulman suuruus on radiaaneina, jos kulman suuruus asteina on
a) $1°$ b) $7°$ c) $45°$ d) $-900°$?

Ratkaisu

a) Lähdetään liikkeelle oikokulmasta.

$180°$ on π radiaania.

$1°$ on $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$ radiaania.

b) $180°$ on π radiaania.

$1°$ on $\frac{\pi}{180}$ radiaania.

$7°$ on $7 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{180} \approx 0{,}122$ radiaania.

c) $180°$ on π radiaania.

$1°$ on $\frac{\pi}{180}$ radiaania.

$45°$ on $45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\overset{1}{\cancel{45}}\pi}{\underset{4}{\cancel{180}}} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ radiaania.

Olisi voitu myös havaita suoraan, että $45°$:n kulma on neljäsosa oikokulmasta, siis $\frac{\pi}{4}$ radiaania.

d) Voidaan lähteä oikokulmasta ja edetä yhden asteen kautta tai voidaan havaita suoraan: $-900° = -5 \cdot 180°$, joten kulman $-900°$ suuruus radiaaneina on $-5\pi \approx -15{,}7$.

Vastaus

a) $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$ b) $\frac{7\pi}{180} \approx 0{,}122$ c) $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ d) $-5\pi \approx -15{,}7$

Radiaani ja laskin

Kun kulman suuruus on annettu radiaaneina ja laskimella lasketaan kulman kosinin, sinin tai tangentin arvo, niin laskin tulee ensin asettaa radiaanitilaan. Joissain laskimisssa tämä tehdään näppäimellä DRG, jota painetaan kunnes laskimen näytössä näkyy R-kirjan (astetilassa D-kirjain). Joissain laskimissa radiaanitila valitaan erityisestä valikosta, ja tilaa ei välttämättä näe näytöstä.

Aseta laskimesi radiaanitilaan ja:

- määritä $\sin 15{,}2$. Tulos on $0{,}48639\ldots$.
- määritä $\tan(-7{,}1)$. Tulos on $-1{,}06489\ldots$.
- määritä kulma, jonka kosini on $0{,}7$. Tulos on $0{,}79539\ldots$.

ESIMERKKI 4

Määritä tarkka arvo. a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ b) $\sin\frac{3\pi}{4}$

Ratkaisu

a) Kulma $-\frac{\pi}{6}$ on asteissa $-\frac{180°}{6} = -30°$, joten

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos(-30°)$ Kulman $30°$ (kulman $\frac{\pi}{6}$) monikertojen sinin, kosinin ja tangentin tarkat arvot ovat taulukkokirjoissa.

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Kulma $\frac{3\pi}{4}$ on asteissa $\frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$, joten

$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin 135°$ Kulman $45°$ (kulman $\frac{\pi}{4}$) monikertojen sinin, kosinin ja tangentin tarkat arvot ovat taulukkokirjoissa.

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vastaus a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

95. Kulman suuruus radiaaneina on
a) 0,76 b) –2,9 c) 12,0.
Ilmaise kulman suuruus asteina yhtä monen numeron tarkkuudella.

96. Mikä kulman suuruus on asteina, jos kulman suuruus radiaaneina on

a) -3π b) $\frac{\pi}{3}$

c) $-\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{4}$?

97. Ilmaise kulman suuruus radiaaneina yhtä monen numeron tarkkuudella.
a) 8,71° b) –239° c) 1213°

98. Ilmaise kulman suuruus radiaaneina (tarkka arvo).
a) 270° b) –720°
c) 150° d) 225°

99. Laske laskimella.
a) sin 5 b) sin (–3,6)
c) sin (–3,6°)

100. Päättele yksikköympyrästä, millä muuttujan x arvoilla on
a) $\sin x = 0$ b) $\sin 2x = 0$ c) $\sin x = 1$.
Muuttujan yksikkö on radiaani.

101. Määritä tarkka arvo.

a) $\sin \frac{\pi}{4}$ b) $\cos \frac{7\pi}{6}$ c) $\tan \frac{4\pi}{3}$

102. Laske funktion $f(x) = \frac{1}{3}\sin 6x - \frac{1}{2}\tan 3x$ arvo muuttujan arvolla $\frac{\pi}{4}$.

103. Laske funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x - \cos^2 2x$ arvo kohdassa a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{6}$.

104. Määritä $\sin x$ ja $\tan x$, kun $\cos x = -\frac{3}{4}$ ja $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

105. Ratkaise yhtälö.
a) $\cos x + 1 = 0$
b) $\cos^2 x + \cos x = 0$
c) $\cos^2 x = \cos x$
Muuttujan x yksikkö on radiaani.

106. Ratkaise yhtälö $\sin 3x = -1$. Mitkä yhtälön juurista ovat välillä $[0, 2\pi]$? Muuttujan x yksikkö on radiaani.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

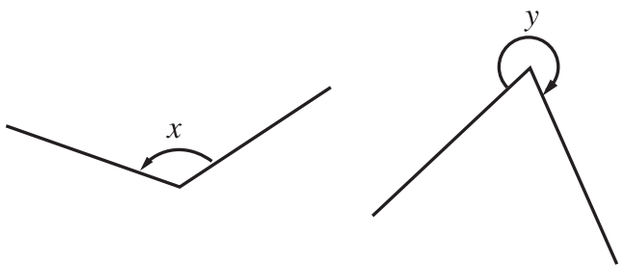
107. Piirrä yhden radiaanin suuruinen kulma.

108. Kulman suuruus radiaaneina on
a) –0,75 b) 119.
Ilmaise kulman suuruus asteina yhtä monen numeron tarkkuudella.

109. Ilmaise kulman suuruus asteina, kun kulman suuruus radiaaneina on

a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $-\frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{7\pi}{4}$.

110. Mittaa kulmien x ja y suuruudet ja ilmaise tulokset radiaaneina yhden desimaalin tarkkuudella.



111. Ilmaise kulman suuruus radiaaneina (tarkka arvo).

a) $15°$ b) $810°$ c) $-225°$

112. Missä neljänneksessä kulman x loppukylki on, kun alkukylki on positiivisella x-akselilla ja kulma x on

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $-\frac{5\pi}{4}$ c) $\frac{7\pi}{3}$

d) 3,2 e) $-7{,}5$?

113. Päättele yksikköympyrästä, millä muuttujan x arvoilla on

a) $\cos x = 0$ b) $\cos 2x = 0$

c) $\cos x = -1$.

Muuttujan x yksikkö on radiaani.

114. Laske lausekkeen $\sin^2 2x + \cos x$ arvo, kun a) $x = \frac{3\pi}{4}$ b) $x = \frac{5\pi}{6}$.

115. Laske lausekkeen

$2 \sin \frac{x}{3} - 4 \cos (\frac{2\pi}{3} - x)$ arvo, kun

a) $x = \pi$ b) $x = \frac{\pi}{2}$.

116. Määritä $\sin x$ ja $\cos x$, kun $\tan x = -2$ ja $0 < x < \pi$.

117. Ratkaise yhtälö.

a) $\sin^2 x - 1 = 0$

b) $\sin^3 x - \sin x = 0$

Muuttujan x yksikkö on radiaani.

118. Ratkaise yhtälö.

a) $\sin x \cos x = \sin x$

b) $\sin^2 x \cos x = \sin x \cos x$

Muuttujan x yksikkö on radiaani.

119. Ratkaise yhtälö $\cos 3x = -1$. Mitkä yhtälön juurista ovat välillä $[0, 2\pi]$? Muuttujan x yksikkö on radiaani.

120. Osoita, että jos r-säteisen ympyrän keskuskulman suuruus u on ilmaistu radiaaneina, niin keskuskulmaa vastaavan

a) kaaren pituus on $b = ur$

b) sektorin pinta-ala on $A = \frac{1}{2} ur^2$.

c) Kuinka suuri on 1,4 radiaanin keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus ja sektorin pinta-ala ympyrässä, jonka säde on 5,7 m?

121. Perustele yksikköympyrän avulla, että

$\sin x < x$, kun $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Trigonometriset funktiot

Tästä lähtien, jollei erikseen mainita, kulman yksikkönä on radiaani.

Tehtävä

a) Taulukoi funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ arvoja nollasta lähtien kumpaankin suuntaan $\frac{\pi}{2}$:n välein ja hahmottele laskettujen arvojen avulla funktioiden kuvaajat. Piirrä kuvaajat myös graafisella laskimella.*

b) Piirrä graafisella laskimella funktion $\tan x$ kuvaaja.

Seuraavassa tarkastellaan trigonometristen funktioiden ominaisuuksia funktioiden kuvaajien avulla.

Jatkuvuus ja määrittelyjoukko

Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla. Molempien funktioiden kuvaajat ovat katkeamattomia käyriä, eli funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat kaikkialla jatkuvia.

Funktio $\tan x$ on määritelty, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, n kokonaisluku.

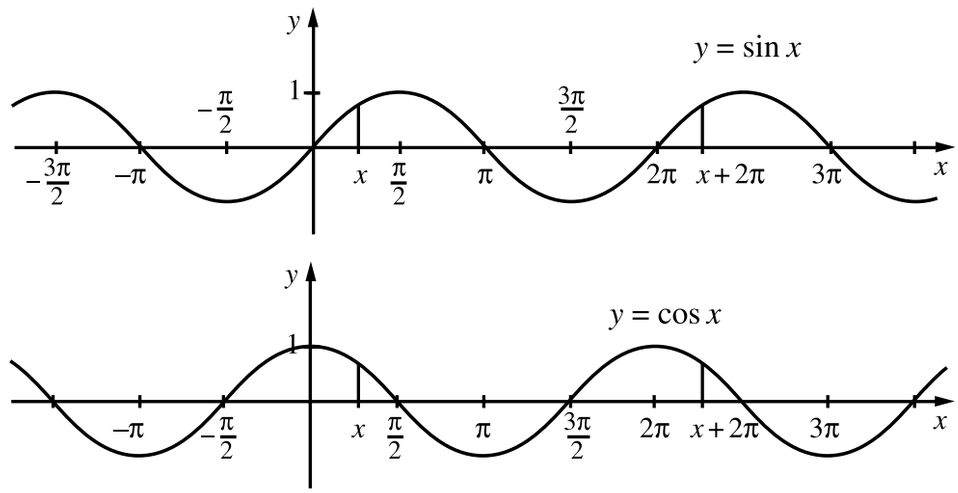
Funktio $\tan x$ on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

---

* Monissa graafisissa laskimissa voidaan valita ns. trigonometrinen näyttö (asetus ZTRIG tai vastaava), jolloin x-akselille tulee jaotus $\frac{\pi}{2}$:n välein.

Jaksollisuus

Sinifunktion ja kosinifunktion jaksot

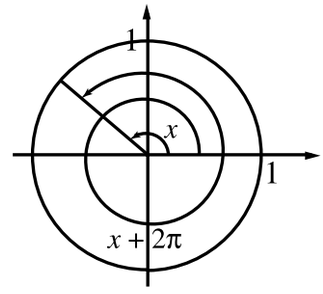


Kuvaajista näkyy, kuinka sinin ja kosinin arvot toistuvat 2π:n (täysikulman) välein. Kaikilla muuttujan x arvoilla on:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Sinifunktio ja kosinifunktio ovat *jaksollisia* funktioita. Molempien funktioiden *jakso* on 2π.*

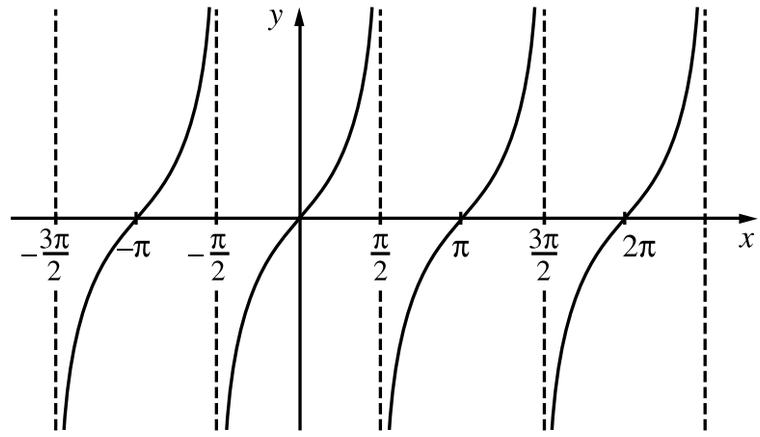
Geometrinen selitys funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ jaksollisuudelle on, että kulmilla x ja $x + 2\pi$ on yksikköympyrässä aina sama kehäpiste.



---

* Yleisesti funktio f on jaksollinen, jos on olemassa luku $a > 0$ niin, että $f(x + a) = f(x)$ jokaisella funktion f määrittelyjoukossa olevalla muuttujan x arvolla. Lukua a sanotaan funktion f jaksoksi (jakson pituudeksi). Jos funktiolla f on jakso a, niin myös luvut $2a$, $3a$, … ovat funktion f jaksoja, sillä esimerkiksi $f(x + 2a) = f((x + a) + a) = f(x + a) = f(x)$. Kun tässä kurssissa puhutaan trigonometristen funktioiden jaksoista, tarkoitetaan niiden pienintä jaksoa (ns. perusjaksoa).

Tangenttifunktion jakso

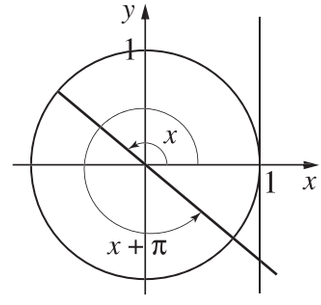


Tangentin arvot toistuvat π:n (oikokulman) välein. Kaikilla muuttujan x arvoilla on

$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

Tangenttifunktio on jaksollinen. Tangenttifunktion jakso on π.

Geometrinen selitys funktion $\tan x$ jaksollisuudelle on, että kulmilla x ja $x + \pi$ on aina sama tangenttipiste.



Arvojoukot

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ arvojoukko on suljettu väli $[-1, 1]$.

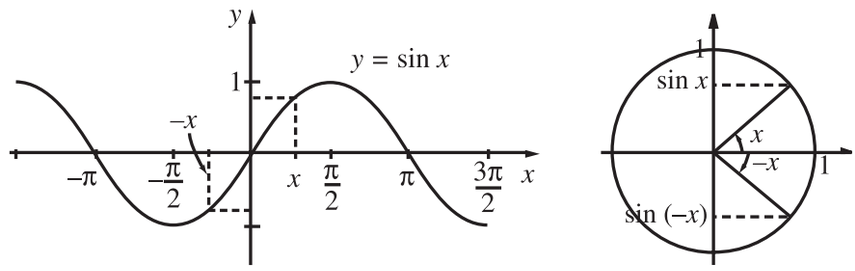
Kaikilla muuttujan x arvoilla on

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \quad \text{ja} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1.$$

Funktio $\tan x$ saa kaikki reaaliarvot, eli funktion $\tan x$ arvojoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

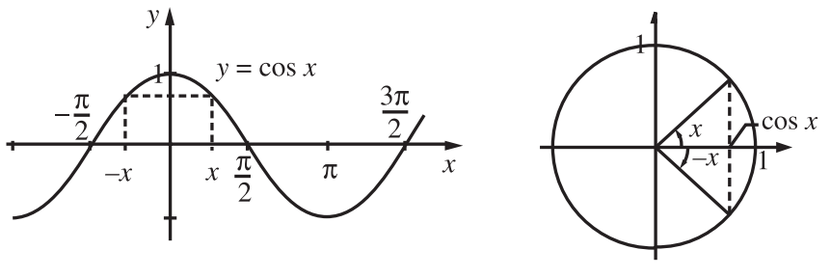
Symmetriat

Kulma ja vastakulma



Kun muuttujan x arvo vaihdetaan vastaluvuksi $-x$, niin myös sinin arvo vaihtuu vastaluvuksi. Funktion $\sin x$ kuvaaja on symmetrinen origon suhteen.

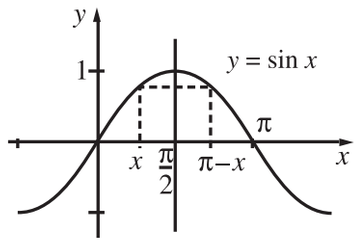
$$\sin(-x) = -\sin x$$

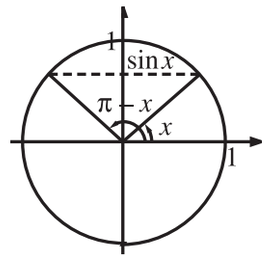


Kun muuttujan arvo x vaihdetaan vastaluvuksi $-x$, kosinin arvo pysyy samana. Funktion $\cos x$ kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen.

$$\cos(-x) = \cos x$$

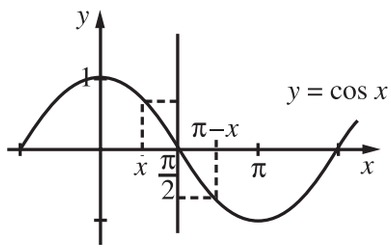
Kulma ja suplementtikulma

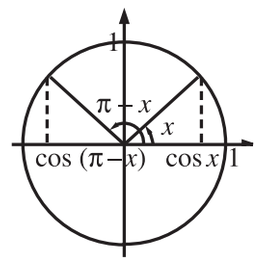




Kun muuttujan arvo x muutetaan suplementtiarvoksi $\pi - x$, sinin arvo pysyy samana. Funktion $\sin x$ kuvaaja on symmetrinen suoran $x = \frac{\pi}{2}$ suhteen.

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$





Kun muuttujan x arvo muutetaan suplementtiarvoksi $\pi - x$, kosini vaihtuu vastaluvuksi. Funktion $\cos x$ kuvaaja on symmetrinen pisteen $(\frac{\pi}{2}, 0)$ suhteen.

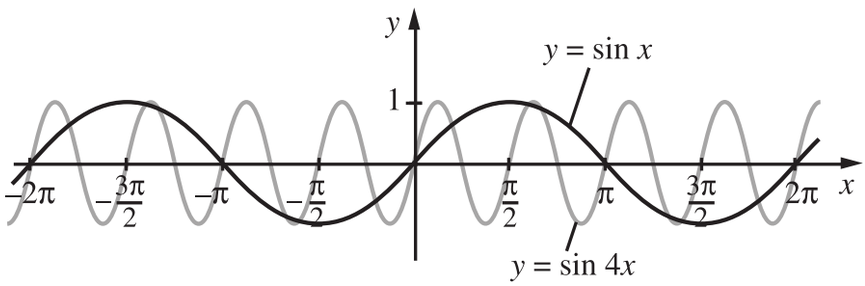
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

ESIMERKKI 1

Piirrä funktion a) $\sin 4x$ b) $2\sin x$ kuvaaja. Vertaa funktion $\sin x$ kuvaajaan. Määritä funktion jakson pituus. Mikä funktion arvojoukko on?

Ratkaisu

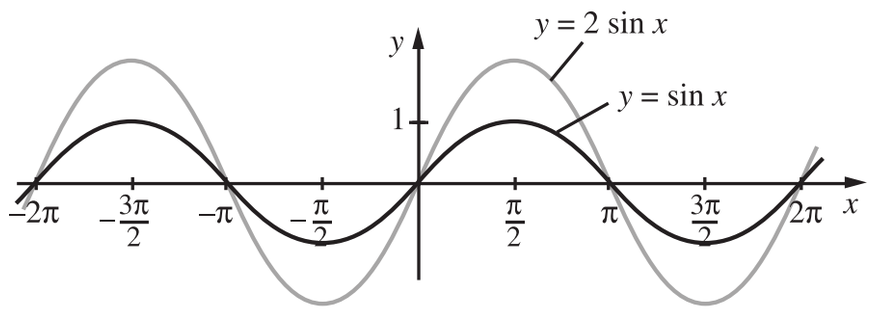
a)



Funktion $\sin 4x$ kuvaaja on saatu tihentämällä funktion $\sin x$ kuvaajaa x-akselin suunnassa. Funktion $\sin 4x$ arvot käyvät läpi yhden jakson jo välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$, sillä $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$. Siis funktion $\sin 4x$ jakson pituus on $\frac{\pi}{2}$.

Funktion $\sin 4x$ arvot vaihtelevat samalla välillä kuin funktion $\sin x$ arvot, eli funktion $\sin 4x$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$.

b)



Funktion $2\sin x$ kuvaaja on saatu venyttämällä funktion $\sin x$ kuvaajaa y-akselin suunnassa. Funktion $2\sin x$ jakso on sama kuin funktion $\sin x$ jakso eli 2π. Funktion $2\sin x$ arvojoukko on väli $[-2, 2]$.

Vastaus

a) jakson pituus $\frac{\pi}{2}$, arvojoukko väli $[-1, 1]$

b) jakson pituus 2π, arvojoukko väli $[-2, 2]$

Yhdistettyjen funktioiden sin *kx* ja cos *kx* jakso

Yhdistettyjen funktioiden $\sin kx$ ja $\cos kx$ jakso on $\frac{2\pi}{k}$.

Perustelu. Osoitetaan, että funktiolle $f(x) = \sin kx$ pätee $f(x + \frac{2\pi}{k}) = f(x)$.

$$f(x + \frac{2\pi}{k}) = \sin k(x + \frac{2\pi}{k}) = \sin (kx + 2\pi) = \sin kx = f(x)$$

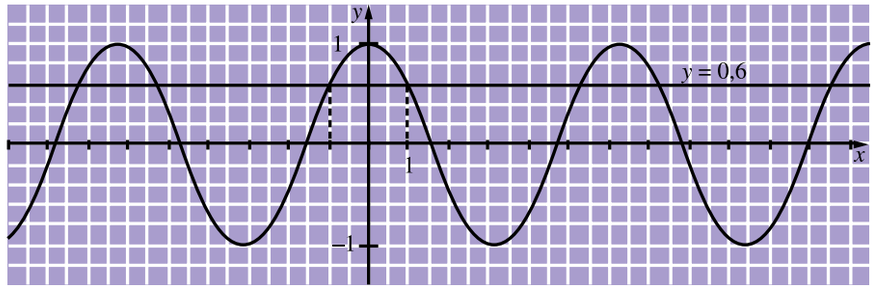
Samalla tavalla osoitetaan, että funktiolle $g(x) = \cos kx$ pätee $g(x + \frac{2\pi}{k}) = g(x)$. □

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö graafisesti yhden desimaalin tarkkuudella.
a) $\cos x = 0{,}6$ b) $\sin x = 0{,}3$

Ratkaisu

a) Piirretään x-akselin suuntainen suora $y = 0{,}6$ ja tutkitaan, missä pisteissä suora leikkaa kosinifunktion kuvaajan. Suoran $y = 0{,}6$ voi piirtää graafisella laskimella samaan kuvaan funktion $\cos x$ kuvaajan kanssa.

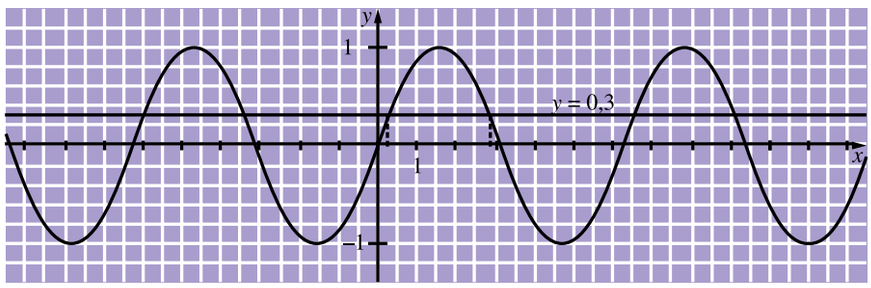


Suora leikkaa kosinifunktion kuvaajan muuttujan arvon $x \approx 0{,}9$ ja symmetrisesti arvon $x \approx -0{,}9$ kohdalla. Muut kohdat, joissa suora leikkaa kuvaajan, ovat kosinifunktion jakson 2π monikerran päässä näistä kohdista.

Yhtälö toteutuu, kun

$x \approx 0{,}9 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -0{,}9 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.

b)



x-akselin suuntainen suora $y = 0{,}3$ leikkaa sinifunktion kuvaajan muuttujan arvon $x \approx 0{,}3$ kohdalla ja kohdan $x = \frac{\pi}{2}$ suhteen symmetrisen arvon $\pi - 0{,}3 \approx 2{,}8$ kohdalla. Muut kohdat, joissa suora leikkaa kuvaajan, ovat sinifunktion jakson 2π monikerran päässä näistä kohdista. Siis yhtälö toteutuu, kun

$x \approx 0{,}3 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 2{,}8 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.

Vastaus

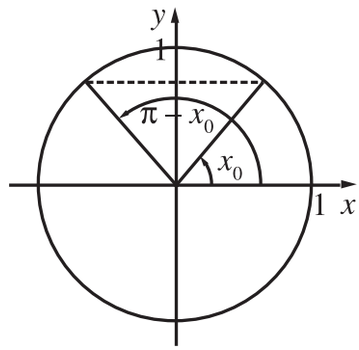
a) $x \approx 0{,}9 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -0{,}9 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
b) $x \approx 0{,}3 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 2{,}8 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö kahden desimaalin tarkkuudella.
a) $\sin x = 0{,}76$ b) $\cos x = -0{,}43$

Ratkaisu

a) Määritetään yksi kulma x_0, joka toteuttaa yhtälön. Yhtälön toteuttavat kaikki kulmat, jotka saadaan lisäämällä kulmaan x_0 tai $\pi - x_0$ täysikulman 2π monikertoja.

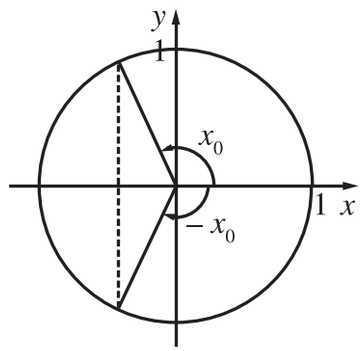


$\sin x = 0{,}76$ Laskimella saadaan yksi ratkaisu $x_0 \approx 0{,}86$.

$x \approx 0{,}86 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx \pi - 0{,}86 + n \cdot 2\pi$

$x \approx 0{,}86 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 2{,}28 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

b) Määritetään yksi kulma x_0, joka toteuttaa yhtälön. Yhtälön toteuttavat kaikki kulmat, jotka saadaan lisäämällä kulmaan x_0 tai $-x_0$ täysikulman 2π monikertoja.



$\cos x = -0{,}43$ Laskimella saadaan yksi ratkaisu $x_0 \approx 2{,}02$.

$x \approx 2{,}02 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -2{,}02 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

Vastaus

a) $x \approx 0{,}86 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 2{,}28 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
b) $x \approx 2{,}02 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -2{,}02 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

ESIMERKKI 4

Ratkaise yhtälö $\tan 2x = 1$.

Ratkaisu

Kaikki kulmat, joiden tangentti on 1, saadaan lisäämällä yhteen kulmaan oikokulman π monikertoja.

$\tan 2x = 1$ $\qquad$ $\frac{\pi}{4}$ on yksi kulma, jonka tangentti on 1.

$2x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \qquad | : 2$

$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku

Vastaus

$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku

ESIMERKKI 5

Ratkaise yhtälö $2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3} = 0$.

Ratkaisu

$2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3} = 0$ Ratkaistaan yhtälöstä ensin $\sin(3x + \frac{\pi}{4})$.

$2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} \quad | : 2$

$\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Yksi kulma, jonka sini on $\frac{\sqrt{3}}{2}$ on $\frac{\pi}{3}$. Yhtälö toteutuu, kun lausekkeen $3x + \frac{\pi}{4}$ arvo on joko $\frac{\pi}{3}$ tai $\pi - \frac{\pi}{3}$ lisättynä 2π:n monikerralla.

$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ tai $3x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$

$3x = \frac{\pi}{12} + n \cdot 2\pi$ tai $3x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot 2\pi \quad | : 3$

$x = \frac{\pi}{36} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x = \frac{5\pi}{36} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, n kokonaisluku

Vastaus $x = \frac{\pi}{36} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x = \frac{5\pi}{36} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, n kokonaisluku

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

122. Määritä funktion jakson pituus. Mikä funktion arvojoukko on?

a) $\cos 4x$ b) $3\cos x$ c) $5\sin\frac{x}{2}$

123. Määritä funktion suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio saa suurimman ja missä kohdissa pienimmän arvon?

a) $4\cos x$ b) $7 - 4\cos x$

124. Ratkaise yhtälö kahden desimaalin tarkkuudella.

a) $\sin x = 0{,}71$

b) $\cos x = -0{,}63$

c) $\tan x = 3{,}7$

125. Millä muuttujan x arvoilla funktion

a) $\sin x$ b) $\cos x$ arvo on $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

126. Määritä funktion nollakohdat.

a) $\tan x + 1$ b) $\tan 3x + 1$

127. Ratkaise kahden desimaalin tarkkuudella yhtälö $\sin 3x = 0{,}62$. Kuinka monta juurta yhtälöllä on välillä $[0, 2\pi]$?

128. Ratkaise yhtälö $10\cos\frac{x}{5} = 5$.

129. Määritä kolmen desimaalin tarkkuudella kohdat, joissa funktioiden $5\sin x$ ja $\cos x$ arvot ovat yhtä suuret.

130. Ratkaise yhtälö $2\sin(2x - \frac{\pi}{2}) + \sqrt{3} = 0$.

131. Millä muuttujan arvoilla funktioiden $\cos 3x$ ja $\cos 2x$ arvot ovat yhtä suuret. Mitkä näistä muuttujan arvoista ovat välillä $[0, 2\pi]$?

132. Millä muuttujan x arvoilla funktioiden $2\sin x\cos x$ ja $\sin x$ arvot ovat yhtä suuret?

133. Millä x:n arvoilla on

a) $\cos^2 x = 1$ b) $2\cos^2 x = 1$

c) $\cos^2 x = \sin^2 x$?

134. Ratkaise yhtälö $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$. (Vihje: Merkitse $\sin x = t$ ja ratkaise ensin t.)

135. Ratkaise yhtälö.

a) $2\sin^2 x + \cos x = 2$

b) $2\cos^2 x - 1 = \sin x$

(Vihje: Sovella trigonometristen funktioiden Pythagoraan lausetta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja saata yhtälö muotoon, jossa esiintyy vain yksi trigonometrinen funktio.)

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

136. Määritä funktion jakson pituus. Mikä funktion arvojoukko on?

a) $6\sin x$ b) $\sin\frac{x}{2}$ c) $\frac{\sin 3x}{2}$

137. Määritä funktion suurin ja pienin arvo. Millä muuttujan arvoilla funktio saa suurimman ja millä pienimmän arvon?

a) $3\sin 2x$ b) $4 + 3\sin 2x$

138. Määritä funktion $f(x) = 5 - 3\sin^2 x$ suurin ja pienin arvo.

139. Ratkaise yhtälö kahden desimaalin tarkkuudella.
a) $\sin x = -0{,}85$
b) $\cos x = 0{,}95$
c) $\tan x = -2{,}1$

140. Määritä funktion nollakohdat.
a) $2\cos x - 1$ b) $\cos 2x - 1$

141. Määritä kahden desimaalin tarkkuudella funktion $3\cos 4x - 1$ välillä $[\pi, 2\pi]$ olevat nollakohdat.

142. Ratkaise yhtälö $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

143. Millä muuttujan x arvoilla funktion $4\sin^2 x$ arvo on 3?

144. Millä muuttujan x arvoilla funktioiden $\sin^2 x$ ja $3\cos^2 x$ arvot ovat yhtä suuret?

145. Millä x:n arvoilla on
a) $2\sin^2 x - \sin x = 0$
b) $2\sin^2 x - \sin x = 1$?

146. Ratkaise yhtälö.
a) $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$
b) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

147. Muotoa $f(t) = a\sin kt + b$, missä $k > 0$, olevan funktion jakson pituus on 2 ja arvojoukko väli $[-8, 4]$.
a) Määritä vakiot a, b ja k.
b) Missä kohdissa funktio f saa arvon 1?

148. Veden syvyys (metreinä) satama-altaassa voidaan laskea likimain käyttäen funktiota $1{,}3\cos\frac{\pi}{6}t + 6{,}5$, missä aika t (tunteina) on laskettu hetkestä, jolloin nousuvesi on korkeimmillaan.
a) Kuinka pitkä veden syvyysvaihtelun jakso on?
b) Millä välillä veden syvyys vaihtelee?
c) Milloin veden syvyys on 6 metriä?

149. Sataman veden syvyys vaihtelee nousu- ja laskuveden myötä 12 tunnin jaksoissa. Syvyys on suurimmillaan $4{,}6$ metriä ja pienimmillään $1{,}6$ metriä. Laadi vedenkorkeuden laskemiseksi matemaattinen malli, jossa muuttujana on aika t (tunteina), ja hetkellä $t = 0$
a) vuorovesi on korkeimmillaan
b) nouseva vesi on veden keskisyvyydessä $3{,}1$ m.

150. Ratkaise yhtälö.
a) $\cos(\cos x) = 1$
b) $\sin(\sin x) = 1$

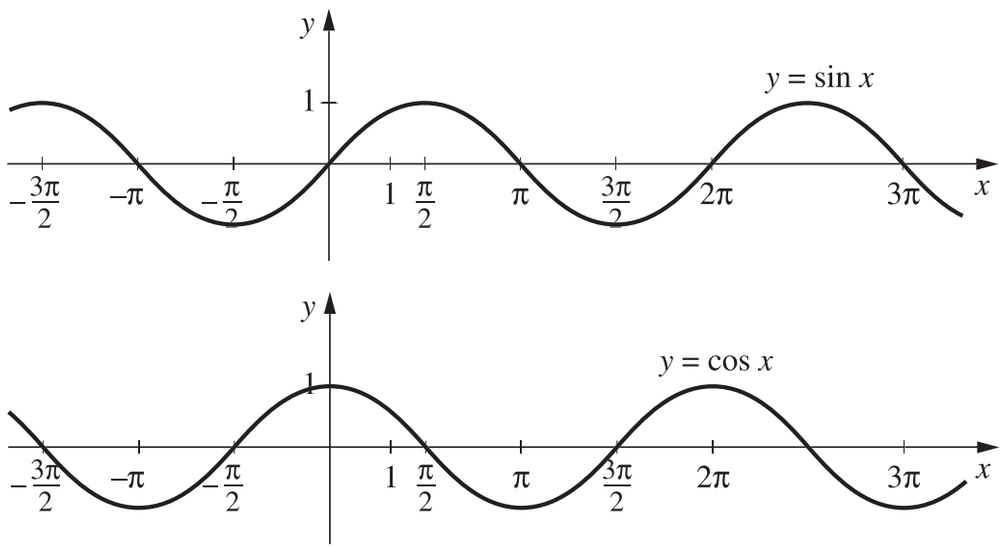
151. Ratkaise yhtälö $\sin\frac{1}{x} = 0$. Kuinka monta juurta yhtälöllä on välillä $\left[\frac{1}{1000}, \frac{1}{100}\right]$?

Trigonometristen funktioiden derivaatat

Ongelma 1

a) Päättele kuvaajasta funktion $\sin x$ derivaatta kohdissa $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ ja $\frac{5\pi}{2}$. Missä muissa kohdissa derivaatalla on sama arvo kuin edellisissä kohdissa? Vertaa derivaattoja funktion $\cos x$ arvoihin samoissa kohdissa.

b) Päättele kuvaajasta likimääräisesti funktion $\sin x$ derivaatta kohdissa 0, π ja 2π. Vertaa derivaattoja funktion $\cos x$ arvoihin samoissa kohdissa.



Ongelma 2

a) Päättele kuvaajasta funktion $\cos x$ derivaatta kohdissa 0, π ja 2π. Missä muissa kohdissa derivaatalla on sama arvo kuin edellisissä kohdissa? Vertaa derivaattoja funktion $\sin x$ arvoihin samoissa kohdissa.

b) Päättele kuvaajasta likimääräisesti funktion $\cos x$ derivaatta kohdissa $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ ja $\frac{5\pi}{2}$. Vertaa derivaattoja funktion $\sin x$ arvoihin samoissa kohdissa.

Ongelma 3

Erotusosamäärän $\dfrac{\sin(x + 0{,}1) - \sin x}{0{,}1}$ arvo on kohtalaisen hyvä likiarvo funktion $\sin x$ derivaatalle kohdassa x. Piirrä samaan graafisen laskimen näyttöön lausekkeen $\dfrac{\sin(x + 0{,}1) - \sin x}{0{,}1}$ kuvaaja ja funktion $\cos x$ kuvaaja.

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ derivaattafunktiot

Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat derivoituvia kaikkialla ja

$$\mathrm{D}\sin x = \cos x$$
$$\mathrm{D}\cos x = -\sin x.$$

Derivointikaavat perustellaan kirjan lopussa olevassa luvussa Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ derivaatat.

ESIMERKKI 1

Derivoi funktio. a) $3 \cos x$ b) $\cos^3 x$ c) $\tan x$

Ratkaisu

a) $\mathrm{D}(3 \cos x) = 3\,\mathrm{D}\cos x$ $\qquad \mathrm{D}(kf(x)) = k\,\mathrm{D}f(x)$

$= 3(-\sin x) = -3 \sin x$

b) Funktio $\cos^3 x$ on funktion $\cos x$ potenssi.

$\mathrm{D}\cos^3 x = \mathrm{D}(\cos x)^3$ $\qquad \mathrm{D}f^n = nf^{n-1}f'$

$= 3(\cos x)^2 \cdot \mathrm{D}\cos x$

$= 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x$

c) $\mathrm{D}\tan x = \mathrm{D}\dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\mathrm{D}\sin x \cdot \cos x - \sin x\, \mathrm{D}\cos x}{\cos^2 x} \qquad \mathrm{D}\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\, (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Voidaan käyttää kaavaa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, jolloin saadaan

$$\mathrm{D}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Voidaan myös jakaa termeittäin.

$$\mathrm{D}\tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$$

Vastaus a) $-3 \sin x$ b) $-3 \cos^2 x \sin x$ c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Funktion $\tan x$ derivointikaava

Funktio $\tan x$ on derivoituva koko määrittelyjoukossaan ja

$$\mathrm{D}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

missä $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

Derivointikaava todistettiin edellisen esimerkin c-kohdassa.

ESIMERKKI 2

Määritä funktion $\tan x$ kuvaajalle muuttujan arvon $\frac{\pi}{4}$ kohdalle piirretyn tangentin yhtälö.

Ratkaisu

Muuttujan arvon $\frac{\pi}{4}$ kohdalla olevan kuvaajan pisteen y-koordinaatti on funktion $\tan x$ arvo kohdassa $\frac{\pi}{4}$. Koska $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, tangentti piirretään kuvaajan pisteeseen $(\frac{\pi}{4}, 1)$.

Tangentin kulmakerroin on funktion $\tan x$ derivaatta kohdassa $\frac{\pi}{4}$.

Derivoidaan funktio $\tan x$.

$\mathrm{D} \tan x = 1 + \tan^2 x$ Voidaan käyttää myös kaavaa $\mathrm{D} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Lasketaan derivaatta kohdassa $\frac{\pi}{4}$.

$$1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} = 1 + (\tan \frac{\pi}{4})^2 = 1 + 1^2 = 2$$

Siis tangentti kulkee pisteen $(\frac{\pi}{4}, 1)$ kautta, ja tangentin kulmakerroin on 2. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$y - 1 = 2(x - \frac{\pi}{4})$ $y - y_0 = k(x - x_0)$, missä $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{4}, 1)$ ja $k = 2$.

$$y - 1 = 2x - \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

Vastaus $y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$

Johdetaan derivointikaavat muotoa $\sin f(x)$ ja $\cos f(x)$ oleville yhdistetyille funktioille.

Sovelletaan yhdistetyn funktion derivointisääntöä

$\mathrm{D}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$. Ulkofunktion g derivaatta g' kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$.

Funktio $\sin f(x)$ on yhdistetty funktio $g(f(x))$, missä ulkofunktio $g(x) = \sin x$. Ulkofunktion $g(x) = \sin x$ derivaatta on $\cos x$. Siis

$\mathrm{D}\sin f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$. Funktion $\sin x$ derivaatta $\cos x$ kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$.

Vastaavasti, jos ulkofunktio $g(x) = \cos x$, niin

$\mathrm{D}\cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$. Funktion $\cos x$ derivaatta $-\sin x$ kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$.

Funktioiden sin *f*(*x*) ja cos *f*(*x*) derivointikaavat

$$\mathrm{D}\sin f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$$
$$\mathrm{D}\cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$$

ESIMERKKI 3

Derivoi funktio $\frac{1}{2}\cos 6x$.

Ratkaisu

$$\mathrm{D}\,\frac{1}{2}\cos 6x = \frac{1}{2}\mathrm{D}\cos 6x \qquad \mathrm{D}\cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-\sin 6x)\,\mathrm{D}(6x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-\sin 6x) \cdot 6 = -3\sin 6x$$

Vastaus $-3\sin 6x$

ESIMERKKI 4

Missä funktio $f(x) = 2x + \sin 2x$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä funktion ääriarvokohdat.

Ratkaisu

Tutkitaan funktion f derivaattafunktion merkkiä.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 2 + \cos 2x \cdot 2 = 2 + 2\cos 2x$$

Funktion $\cos 2x$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$. Siis kaikilla muuttujan arvoilla on $\cos 2x \geqslant -1$, joten

$$f'(x) = 2 + 2\cos 2x \geqslant 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0.$$

Siis $f'(x) \geqslant 0$ kaikilla x.

Osoitetaan vielä, että derivaattafunktio saa arvon 0 vain erillisissä kohdissa.

Derivaattafunktion arvo on 0 kohdissa, joissa $\cos 2x = -1$.

$$\cos 2x = -1$$

$$2x = \pi + n \cdot 2\pi \qquad | : 2$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \text{ kokonaisluku}$$

Koska $f'(x) \geqslant 0$ kaikilla x ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä kohdissa, funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. Funktiolla f ei ole ääriarvokohtia.

Vastaus

kaikkialla aidosti kasvava, ei ääriarvokohtia

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

152. Derivoi funktio.
a) $5 \sin x$
b) $\sin^3 x$
c) $2 \cos x - \cos^2 x$

153. Derivoi funktio.
a) $\sin x \cos x$ b) $\sin^2 x \cos x$

154. Kotangenttifunktio $\cot x$ määritellään $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Derivoi kotangenttifunktio.

155. Funktion $f(x) = 3 \tan x + 2 \cos x$ kuvaajalle piirretään tangentti muuttujan arvon $\dfrac{\pi}{6}$ kohdalle. Määritä tangentin kulmakerroin.

156. Derivoi funktio.
a) $\cos 4x$ b) $3 \cos \dfrac{x}{6}$ c) $\sin(\dfrac{\pi}{4} - 3x)$

157. Laske $f'(\dfrac{\pi}{4})$, kun $f(x) = \cos 2x - \sin^2 x$.

158. Funktion $f(x) = \sin 3x$ kuvaajalle piirretään tangentti ja normaali muuttujan arvon $\dfrac{\pi}{3}$ kohdalle. Määritä tangentin ja normaalin yhtälöt.

159. Määritä funktion $g(x) = x - \sin 2x$ derivaattafunktion nollakohdat.

160. Osoita, että funktio $f(x) = \dfrac{1}{3} x^3 + x - \cos x$ on kaikkialla aidosti kasvava.

161. Osoita, että $\sin x < x$ kaikilla $x > 0$.

162. Määritä funktion $f(x) = \cos x + x \sin x$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, \pi]$.

163. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{2}{\cos x} - \tan x$ pienin arvo välillä $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

164. Veden syvyys satamassa vaihtelee nousu- ja laskuveden myötä. Veden syvyyden metreinä ilmaisee likimain funktio

$$h(t) = 2{,}5 \sin \frac{\pi}{6} t + 6,$$

missä t on keskiyöstä kulunut aika tunteina.
a) Millä välillä veden syvyys vaihtelee?
b) Kuinka pitkä veden syvyysvaihtelun jakso on?
c) Mikä veden syvyys on kello 4 ja kello 11?
d) Millä nopeudella vedenpinta nousee tai laskee kello 4 ja kello 11?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

165. Määritä funktion
$f(x) = \sqrt{2}\sin x + 5\sqrt{2}\cos x$
kuvaajalle muuttujan arvon $\frac{\pi}{4}$ kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin.

166. Derivoi funktio.

a) $\frac{1}{\cos x}$ b) $\frac{1}{\sin^2 x}$

167. Osoita, että $\mathrm{D}\frac{\sin x}{\cos x + 1} = \frac{1}{\cos x + 1}$.

168. Määritä funktion $g(x) = \ln\cos x$ määrittelyjoukko ja derivoi funktio g.

169. Derivoi funktio.

a) $e^{\sin x}$ b) $e^{\sin^2 x}$

170. Derivoi funktio.

a) $\cos\frac{x}{2}$ b) $\sin^2 3x$

171. Pisteeseen, jossa funktion
$f(x) = 3\tan x + \sin 4x + 5\cos x$ kuvaaja leikkaa y-akselin, piirretään kuvaajan tangentti ja normaali. Määritä tangentin ja normaalin yhtälöt.

172. Millä vakion a ja b arvoilla funktio
$f(x) = a\sin x + b\cos 2x$ toteuttaa molemmat ehdot $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ja $f''(\frac{\pi}{2}) = 1$?

173. Kuinka monta juurta yhtälöllä $x = \cos x$ on? Määritä juurten likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

174. Osoita, että $\tan x > x$ välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.

175. Määritä funktion
$f(x) = (2x - 3)\sin 2x + \cos 2x$
suurin ja pienin arvo välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.

176. Määritä funktion $f(x) = \tan x - 8\sin x$ ääriarvokohdat ja ääriarvot välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

177. Funktion $\sin x$ kuvaajalle piirretään tangentti muuttujan arvon a kohdalle. Osoita, että jos tangentti ei ole vaakasuora, niin tangentin ja suoran $x = a$ x-akselista erottaman janan pituus on $|\tan a|$.

178. Veden syvyys satama-altaassa vaihtelee vuoroveden 12 tunnin jaksoissa niin, että aina keskiyöllä saavutetaan keskisyvyys 8,0 metriä, kello 3 suurin syvyys 10,0 metriä ja kello 9 pienin syvyys 6,0 metriä. Käytä matemaattisena mallina sinifunktiota ja laske, millä nopeudella vedenpinta nousee tai laskee a) kello 1
b) kello 6.

179. a) Osoita, että kaikilla muuttujan x arvoilla on $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$. Millä muuttujan arvoilla on $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$?

b) Osoita, että $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ kaikilla $x > 0$.

180. Derivoi funktiot $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$, joissa muuttuja on suunnatun kulman suuruus asteina. Määritä erityisesti
a) funktion $\sin\alpha$ derivaatta kohdassa 0
b) funktion $\cos\alpha$ derivaatta kohdassa 30.
Piirrä funktioiden $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ sekä niiden derivaattafunktioiden kuvaajat samaan graafisen laskimen näyttöön.

181. Joissain laskimissa on näppäimet niin sanotuille *hyperbolisille funktioille* $\sinh x$ (hyperbolinen sini), $\cosh x$ (hyperbolinen kosini) ja $\tanh x$ (hyperbolinen tangentti). Nämä funktiot määritellään eksponenttifunktion avulla:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{ja}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Piirrä funktioiden $\sinh x$ ja $\cosh x$ kuvaajat graafisella laskimella. Funktion $\cosh x$ kuvaaja on ns. *ketjukäyrä*: päistään ripustettu ketju tai venymätön köysi asettuu (sopivalla asteikonvalinnalla) funktion $\cosh x$ kuvaajan muotoon. Funktioilla $\sinh x$, $\cosh x$ ja $\tanh x$ on monia samantyyppisiä ominaisuuksia kuin funktioilla $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$. Osoita niistä seuraavat.

a) $\sinh(-x) = -\sinh x$ ja $\cosh(-x) = \cosh x$

b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$*

c) $\mathrm{D}\sinh x = \cosh x$ ja $\mathrm{D}\cosh x = \sinh x$

d) Määrittele funktio $\tanh x$ ja osoita, että

$$\mathrm{D}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

---

* Yhtälö osoittaa, että pisteet $(\cosh x, \sinh x)$ ovat käyrällä $x^2 - y^2 = 1$. Käyrä on tyypiltään ns. hyperbeli (katso Analyyttinen geometria, luku Ellipsi ja hyperbeli).

Trigonometristen funktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja

ESIMERKKI 1

Määritä funktion $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 2$ suurin ja pienin arvo.

Ratkaisu

Tapa 1. Määritetään funktion f suurin ja pienin arvo tutkimalla funktiota jakson pituisella suljetulla välillä.

Koska funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jaksollisia jaksona 2π, niin myös funktio $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 2$ on jaksollinen jaksona 2π:
$f(x + 2\pi) = f(x)$.

Jokaisen arvon, jonka funktio f saa, se saa jo välillä $[0, 2\pi]$. Riittää siis, että määritetään funktion f suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$.*

Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$ — Erotetaan yhteinen tekijä $\sin x$.

$\sin x\,(2 \cos x - 1) = 0$ — Käytetään tulon nollasääntöä.

$\sin x = 0$ tai $2 \cos x - 1 = 0$

$\sin x = 0$ tai $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

---

* Jos funktiota f tutkittaisiin funktion koko määrittelyjoukossa $\mathbb{R}$, niin jouduttaisiin selvittämään derivaattafunktion merkit. Se olisi vaivalloista, sillä jos jaksollisella funktiolla on derivaatan nollakohtia, niin niitä on äärettömän monta.

Välillä $]0, 2\pi[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat

π, $\frac{\pi}{3}$ ja $-\frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.

Lasketaan funktion $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 2$ arvo derivaattafunktion nollakohdissa.

$f(\pi) = \sin^2 \pi + \cos \pi - 2 = 0^2 + (-1) - 2 = -3$

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - 2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{4}$

$f(\frac{5\pi}{3}) = \sin^2 \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3} - 2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{4}$

Lasketaan funktion f arvot välin $[0, 2\pi]$ päätepisteissä. Koska funktion f jakso on 2π, arvot $f(0)$ ja $f(2\pi)$ ovat yhtä suuret.

$f(2\pi) = f(0) = \sin^2 0 + \cos 0 - 2 = 0^2 + 1 - 2 = -1$

Funktion f suurin arvo on $-\frac{3}{4}$ ja pienin arvo -3.

Tapa 2. Funktion $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 2$ lauseke voidaan saattaa muotoon, jossa esiintyy vain yksi trigonometrinen funktio, joten voidaan edetä myös toisin.

Kaavasta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ saadaan $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, joten

$f(x) = \sin^2 x + \cos x - 2 = 1 - \cos^2 x + \cos x - 2 = -\cos^2 x + \cos x - 1.$

Funktio $f(x)$ voidaan tulkita yhdistetyksi funktioksi $u(s(x))$, missä sisäfunktio on $s(x) = \cos x$ ja ulkofunktio $u(t) = -t^2 + t - 1$.
Funktion $\cos x$ arvojoukko on $[-1, 1]$. Siis riittää, kun määritetään funktion $u(t) = -t^2 + t - 1$ suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-1, 1]$.

Derivoidaan funktio u ja määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$u'(t) = -2t + 1$

$-2t + 1 = 0$

$t = \frac{1}{2}$

Derivaattafunktion nollakohta $\frac{1}{2}$ on välillä $]-1, 1[$.

Lasketaan funktion $u(t) = -t^2 + t - 1$ arvo derivaattafunktion nollakohdassa ja välin $[-1, 1]$ päätepisteissä.

$$u(\tfrac{1}{2}) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$u(-1) = -(-1)^2 - 1 - 1 = -3$$

$$u(1) = -1^2 + 1 - 1 = -1$$

Funktion f suurin arvo on $-\frac{3}{4}$ ja pienin arvo -3.

Vastaus suurin arvo $-\frac{3}{4}$, pienin arvo -3

ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x) = \sin x - \cos x$ suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja pienimmän arvon?

Ratkaisu Koska funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jaksollisia jaksona 2π, myös funktio $f(x) = \sin x - \cos x$ on jaksollinen jaksona 2π. Suurimman ja pienimmän arvon määrittämiseksi riittää, että määritetään funktion f suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$.

Derivoidaan funktio f.

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x = -\cos x \qquad \big| : \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$$\tan x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi, \; n \text{ kokonaisluku}$$

Välillä $]0, 2\pi[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat $\frac{3\pi}{4}$ ja $\frac{3\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{7\pi}{4}$.

Lasketaan funktion $f(x) = \sin x - \cos x$ arvo derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(\frac{3\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(\frac{7\pi}{4}) = \sin \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Lasketaan funktion f arvo välin $[0, 2\pi]$ päätepisteissä.

$$f(0) = f(2\pi) = 0 - 1 = -1$$

Suurin arvo on $\sqrt{2}$ ja pienin arvo $-\sqrt{2}$.

Yhden jakson pituisella välillä $[0, 2\pi]$ funktio f saa suurimman arvon kohdassa $\frac{3\pi}{4}$. Koko määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$ funktio f saa suurimman arvonsa kohdissa $\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku. Vastaavasti funktio f saa pienimmän arvonsa kohdissa $\frac{7\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.

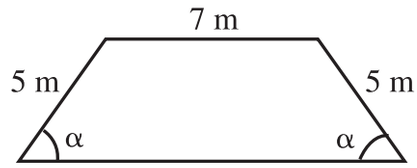
Vastaus

suurin arvo $\sqrt{2}$ kohdissa $\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku,

pienin arvo $-\sqrt{2}$ kohdissa $\frac{7\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

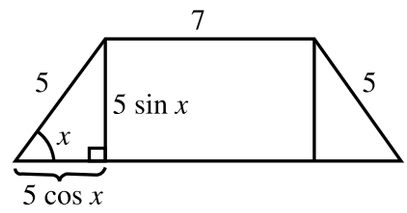
ESIMERKKI 3

Vajan pääty on muodoltaan tasakylkinen puolisuunnikas. Ylös tulevan vaakatuen pituus on 7 metriä ja sivutukien pituus 5 metriä. Määritä sivutukien ja maanpinnan välinen kulma α niin, että päädyn pinta-ala (ja siis myös vajan tilavuus) on mahdollisimman suuri. Anna vastaus asteina asteen tarkkuudella. Kuinka suuri päädyn pinta-ala tällöin on, ja mikä katoksen leveys maan tasalla on?*



Ratkaisu

Valitaan muuttujaksi x kysytyn kulman suuruus radiaaneina.**
Muuttuja x voi vaihdella suljetulla välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.



Pääty muodostuu kahdesta keskenään yhtenevästä suorakulmaisesta kolmiosta ja suorakulmiosta. Päädyn pinta-ala muuttujan x funktiona on

$$A(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \sin x \cdot 5 \cos x + 7 \cdot 5 \sin x$$
$$= 25 \sin x \cos x + 35 \sin x.$$

Määritetään välin $[0, \frac{\pi}{2}]$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Derivoidaan.

$$A'(x) = 25 \cos x \cos x + 25 \sin x (-\sin x) + 35 \cos x$$
$$= 25 \cos^2 x - 25 \sin^2 x + 35 \cos x \qquad \text{Sijoitetaan } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$
$$= 25 \cos^2 x - 25(1 - \cos^2 x) + 35 \cos x$$
$$= 25 \cos^2 x - 25 + 25 \cos^2 x + 35 \cos x$$
$$= 50 \cos^2 x + 35 \cos x - 25$$

---

* Samanlainen ongelma oli tehtävässä 94 kirjan Juuri- ja logaritmifunktiot luvussa Juurifunktioiden sovelluksia. Kulman valitseminen muuttujaksi on vaihtoehtoinen ratkaisutapa monille kyseisen luvun tehtäville.

** On välttämätöntä siirtyä radiaaneihin, sillä edellä on opittu derivoimaan trigonometriset funktiot vain silloin, kun muuttuja on radiaaneina.

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$50\cos^2 x + 35\cos x - 25 = 0 \qquad | : 5$

$10\cos^2 x + 7\cos x - 5 = 0$

$\cos x$ voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.*

$$\cos x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-5)}}{2 \cdot 10} = \frac{-7 \pm \sqrt{249}}{20}$$

$$\cos x = \frac{-7 + \sqrt{249}}{20} \approx 0{,}4390 \text{ tai } \cos x = \frac{-7 - \sqrt{249}}{20} \approx -1{,}1390$$

Koska funktion $\cos x$ arvojoukko on $[-1, 1]$, jälkimmäinen juuri ei kelpaa.

Siis:

$\cos x \approx 0{,}4390$ Sovellustehtävässä voidaan käyttää likiarvoja.

$x \approx 1{,}116 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -1{,}116 + n \cdot 2\pi$.

Ainoa välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ oleva derivaattafunktion nollakohta on $1{,}116$.

Lasketaan funktion $A(x) = 25\sin x \cos x + 35\sin x$ arvo derivaattafunktion nollakohdassa ja välin päätepisteissä.

$A(1{,}116) = 25\sin 1{,}116\cos 1{,}116 + 35\sin 1{,}116 \approx 41{,}3$

$A(0) = 25\sin 0\cos 0 + 35\sin 0 = 0$

$A(\frac{\pi}{2}) = 25\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 35\sin\frac{\pi}{2} = 25 \cdot 1 \cdot 0 + 35 \cdot 1 = 35$

Pinta-ala on suurin, kun kulma $x \approx 1{,}116$.

Kulman suuruus asteina on tällöin $1{,}116 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 64°$.

Päädyn pinta-ala on noin $41{,}3\ \text{m}^2$ ja leveys maan tasalla noin $7 + 2 \cdot 5\cos 1{,}116 \approx 11{,}4$ (m).

Vastaus 64°, päädyn pinta-ala $41{,}3\ \text{m}^2$, leveys maan tasalla $11{,}4$ m

---

* Voidaan myös merkitä $\cos x = t$ ja ratkaista ensin yhtälö $10t^2 + 7t - 5 = 0$.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

182. Määritä funktion $f(x) = 2\cos x + \cos^2 x$ suurin ja pienin arvo.

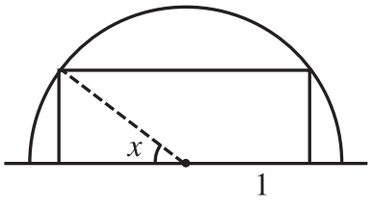
183. Määritä funktion $f(x) = 2\sin^3 x + 3\cos^2 x$ suurin ja pienin arvo.

184. Trigonometrisen funktion suurimman ja pienimmän arvon voi joskus määrittää myös ilman derivaattaa. Määritä funktion $f(x) = 12 - 3\cos x$ suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja pienimmän arvon?

185. Määritä funktion $f(x) = \sin x + \cos x$ suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

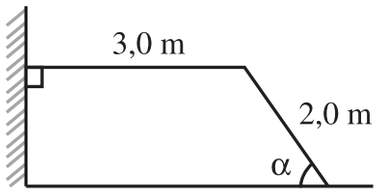
186. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 1. Valitse muuttujaksi x kolmion kantakulman suuruus radiaaneina ja ilmaise kolmion pinta-ala $A(x)$ muuttujan x funktiona. Määritä kantakulman suuruus niin, että kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri.

187. Puoliympyrän säde on 1. Puoliympyrän sisään on piirretty suorakulmio, jonka yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla. Mitkä pinta-alaltaan suurimman suorakulmion mitat ovat? Valitse muuttujaksi kuvioon merkityn kulman x suuruus radiaaneina.



188. Määritä funktion $f(x) = \sin x \cos x + \cos x$ suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

189. Määritä asteen tarkkuudella kulma α niin, että seinää vasten rakennettavan katoksen poikkileikkauksen pinta-ala (ja siis katoksen tilavuus) on mahdollisimman suuri.



SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

190. Määritä funktion $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$ suurin ja pienin arvo.

191. Määritä funktion $f(x) = \sin^2 x + 2\cos^2 x + \sin x$ suurin ja pienin arvo.

192. Määritä funktion $f(x) = 9 + 4\sin 2x$ suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja pienimmän arvon?

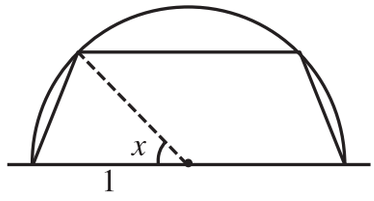
193. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$ suurin ja pienin arvo.

194. Osoita, että kaikilla muuttujan arvoilla on $\sin^3 x \leqslant 3\sin x + 2$.

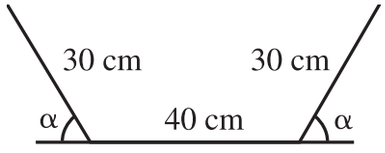
195. Määritä funktion $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ suurin ja pienin arvo.

196. Määritä funktion $g(x) = \sin x \cos^3 x$ suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio g saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

197. Puoliympyrässä, jonka säde on 1, on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka yhtenä sivuna on ympyrän halkaisija. Valitse muuttujaksi kuvioon merkityn kulman x suuruus radiaaneina ja määritä puolisuunnikkaan suurin mahdollinen pinta-ala. Kuinka monta prosenttia suurimman puolisuunnikkaan pinta-ala on puoliympyrän pinta-alasta?

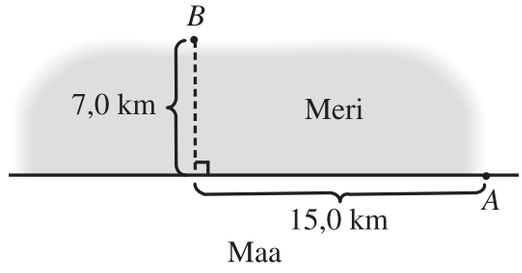


198. Säiliön pohja ja sivut tehdään 1,00 metrin levyisestä metallilevystä taivuttamalla levyn sivuilta 30 cm:n levyiset kaistaleet yhtä paljon ylöspäin. Määritä taivutuskulma α asteen tarkuudella niin, että säiliön tilavuus on mahdollisimman suuri.

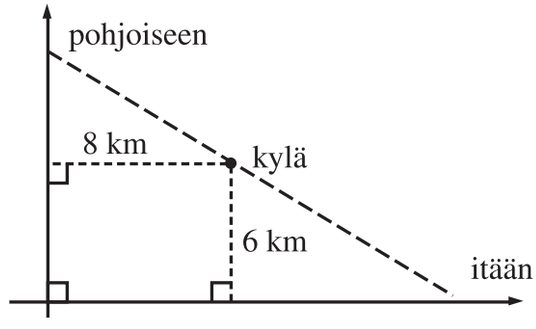


199. Puoliympyrän säde on R. Puoliympyrän sisään on piirretty suorakulmio, jonka yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla ja vastakkaiset kärjet puoliympyrän kaarella. Mikä tällaisen suorakulmion suurin mahdollinen piiri on?

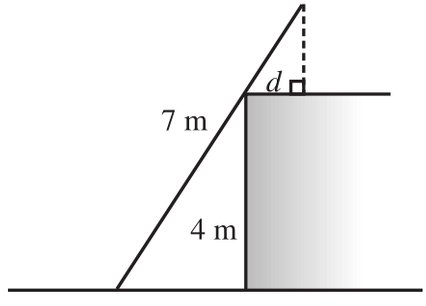
200. Rannassa sijaitsevalta muuntajalta A on vedettävä sähkökaapeli saareen B. Kaapelointikustannukset kilometriä kohden ovat merellä kaksinkertaiset verrattuna kaapelointikustannuksiin maalla. Määritä kaapelin reitti niin, että kokonaiskustannukset ovat mahdollisimman pienet. Ratkaise ongelma valitsemalla muuttujaksi kulma.



201. Kylän etäisyys toisesta kohtisuoraan risteävästä tiestä on 6,0 km ja toisesta 8,0 km. Kylän kautta suunnitellaan rakennettavaksi teitä yhdistävä suora yhdystie. Kuinka pitkä lyhin mahdollinen tie on? Missä kohdassa lyhin tie erkaantuu itään kulkevalta tieltä? Ratkaise ongelma valitsemalla muuttujaksi kulma.



202. Kuinka suuri kulma tikkaiden tulee muodostaa maan pinnan kanssa, jotta etäisyys d olisi mahdollisimman suuri (ja tikkaat mahdollisimman turvalliset)? Anna vastaus asteen tarkkuudella.



Lukujono

Ongelma

Keksi älykkyystestin tehtävälle 1 ainakin kaksi eri ratkaisua. Määritä erityisesti jonon viides ja yhdeksäs jäsen.

Testaa älykkyytesi.

Tehtävä 1. Jatka lukujonoa
2, 4, 6, ...

Tehtävä 2. Mikä seuraavista ei kuulu joukkoon: liikka, matikka, salakka?

Lukujonon lukuja kutsutaan jonon *jäseniksi*. Lukujono kuvaillaan antamalla sääntö, joka määrää yksikäsitteisesti jonon jokaisen jäsenen.

ESIMERKKI 1

Määritä jonon viisi ensimmäistä jäsentä.
a) Jono, jonka n. jäsen on $3n + 1$.
b) Jono, jonka ensimmäinen jäsen on 2, toinen jäsen on 3 ja kolmannesta jäsenestä alkaen jonon jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen summa.
c) Alkulukujen jono.

Ratkaisu

a) Jonon ensimmäinen jäsen on $3 \cdot 1 + 1$, toinen jäsen $3 \cdot 2 + 1$ jne. Jonon viisi ensimmäistä jäsentä lasketaan sijoittamalla muuttujan n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5 funktion

$f(n) = 3n + 1$

lausekkeeseen.

n	$f(n) = 3n + 1$
1	$3 \cdot 1 + 1 = 4$
2	$3 \cdot 2 + 1 = 7$
3	$3 \cdot 3 + 1 = 10$
4	$3 \cdot 4 + 1 = 13$
5	$3 \cdot 5 + 1 = 16$

Jono alkaa:

4, 7, 10, 13, 16, … .

b) Jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 2 ja 3. Kolmannesta jäsenestä alkaen jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen summa. Jono jatkuu:

2, 3, 5, 8, 13, … .

c) Alkuluvut ovat lukua yksi suuremmat jaottomat kokonaisluvut. Alkulukujen jono alkaa

2, 3, 5, 7, 11, … .

Vastaus a) 4, 7, 10, 13 ja 16 b) 2, 3, 5, 8 ja 13 c) 2, 3, 5, 7 ja 11

Lukujonon merkitseminen

Lukujonon jäseniä merkitään alaindeksillä varustetulla kirjaimella. Yleensä indeksit ovat positiivisia kokonaislukuja:

$a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Indeksi ilmaisee jäsenen järjestysnumeron jonossa: ensimmäinen jäsen on a_1, toinen jäsen a_2 jne. Jonon n. jäsen on a_n.

Jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ voidaan merkitä lyhyesti (a_n).

Lukujonossa jokaiseen positiiviseen kokonaislukuun $1, 2, 3, \ldots$ liittyy vastaava lukujonon jäsen $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Lukujono voidaan siis tulkita funktioksi f, jonka muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja.

$a_1 = f(1), \ a_2 = f(2), \ a_3 = f(3), \ldots$

eli yleisesti

$a_n = f(n)$.

Tähän havaintoon perustuu lukujonon täsmällinen määritelmä.

Lukujonon määritelmä

Lukujono on funktio, jonka muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja.

Jos funktiolla f on lauseke, niin jonon (a_n), missä $a_n = f(n)$, jäsenet voidaan laskea lausekkeeseen sijoittamalla. Lauseketta sanotaan *jonon lausekkeeksi*.

Esimerkin 1 a-kohdan jonolla on lauseke $a_n = 3n + 1$.

Jos jonon jäsenet a_n (funktion f arvot $f(n)$) on määritelty jonon edellisten jäsenten avulla, kyseessä on *rekursiivinen* lukujono.

Esimerkin 1 b-kohdan jono oli määritelty rekursiivisesti: Kolmannesta jäsenestä alkaen jäsen on kahden edellisen jäsenen summa. Näin voidaan laskea periaatteessa jonon mikä tahansa jäsen, vaikka esimerkiksi tuhannennen jäsenen laskeminen on aika työlästä. Usein, mutta ei aina, rekursiiviselle jonolle voidaan löytää lauseke, johon sijoittamalla voidaan suoraan laskea mikä tahansa jäsen.

Jonon jäsenet (funktion f arvot) voidaan kuvailla myös jollain muulla yksikäsitteisellä tavalla.

Esimerkin 1 c-kohdan jono, alkulukujen jono, on yksikäsitteisesti määritelty, sillä minkä tahansa järjestysnumeron omaava alkuluku on yksikäsitteisesti määrätty (vaikkei ehkä tunnettu). Jonon lauseke tai rekursiivinen määritelmä olisi toivottavampi, sillä silloin voitaisiin laskea jonon jokainen jäsen. On kuitenkin todistettu, että alkulukujen jonolle ei löydy lauseketta tai laskukaavalla annettua rekursiivista määritelmää.

ESIMERKKI 2

Laske jonon $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ viisi ensimmäistä jäsentä ja kolmaskymmenes jäsen a_{30}, kun a) $a_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$ b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2}{n}$.
Havainnollista jonoa koordinaatistossa.

Ratkaisu

a) Lausekkeeseen $a_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$ sijoitetaan n:n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$a_3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{3 + 1} = \frac{8}{4} = 2$$

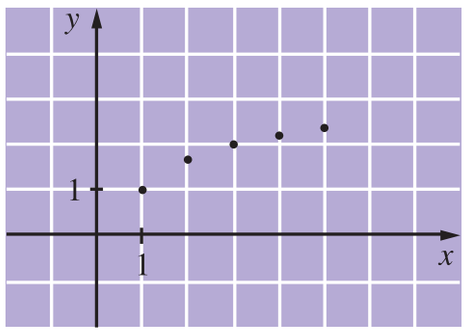
$$a_4 = \frac{3 \cdot 4 - 1}{4 + 1} = \frac{11}{5}$$

$$a_5 = \frac{3 \cdot 5 - 1}{5 + 1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Jono alkaa $1,\ \dfrac{5}{3},\ 2,\ \dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{3}, \ldots$.

Jonon 30. jäsen on $a_{30} = \dfrac{3 \cdot 30 - 1}{30 + 1} = \dfrac{89}{31}$.

Jonoa havainnollistetaan koordinaatistossa funktion $f(n) = \dfrac{3n-1}{n+1}$ kuvaajana, missä muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja. Ykkösen kohdalle merkitään $f(1) = a_1$, kakkosen kohdalle $f(2) = a_2$ jne.



b) Lausekkeeseen $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$ sijoitetaan n:n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = (-1)^{1+1} \cdot \frac{2}{1} = (-1)^2 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$$

$$a_2 = (-1)^{2+1} \cdot \frac{2}{2} = (-1)^3 \cdot 1 = -1 \cdot 1 = -1$$

$$a_3 = (-1)^4 \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Lausekkeen $(-1)^{n+1}$ merkit vuorottelevat.

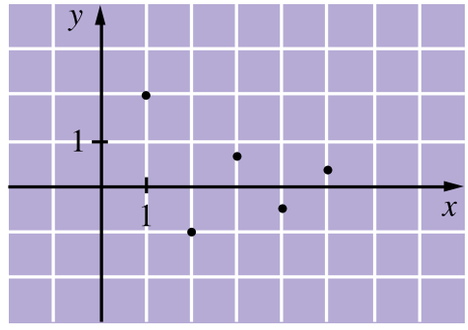
$$a_4 = (-1)^5 \cdot \frac{2}{4} = -1 \cdot \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = (-1)^6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Jono alkaa $2, -1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \ldots$.

Jonon 30. jäsen on

$$a_{30} = (-1)^{31} \cdot \frac{2}{30} = -1 \cdot \frac{2}{30} = -\frac{1}{15}.$$



Vastaus

a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat $1, \frac{5}{3}, 2, \frac{11}{5}$ ja $\frac{7}{3}$.

Kolmaskymmenes jäsen on $\frac{89}{31}$.

b) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat $2, -1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{5}$.

Kolmaskymmenes jäsen on $-\frac{1}{15}$.

ESIMERKKI 3

Muodosta jonon lauseke $a_n = f(n)$.
a) parillisten positiivisten kokonaislukujen jono $2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots$
b) parittomien positiivisten kokonaislukujen jono $1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots$

Ratkaisu

a) On pääteltävä funktion f lauseke niin, että $2 = f(1),\ 4 = f(2),\ 6 = f(3),\ 8 = f(4)$ jne. Huomataan, että

$2 = 2 \cdot 1,\quad 4 = 2 \cdot 2,\quad 6 = 2 \cdot 3,\quad 8 = 2 \cdot 4$ jne.

Yleisesti jonon n. jäsen on $2 \cdot n$. Siis

$a_n = 2n$.

b) On pääteltävä funktion f lauseke niin, että $1 = f(1),\ 3 = f(2),\ 5 = f(3),\ 7 = f(4)$ jne. Huomataan, että

$1 = 2 \cdot 1 - 1,\quad 3 = 2 \cdot 2 - 1,\quad 5 = 2 \cdot 3 - 1,\quad 7 = 2 \cdot 4 - 1$ jne.

Yleisesti jonon n. jäsen on $2n - 1$. Siis

$a_n = 2n - 1$.

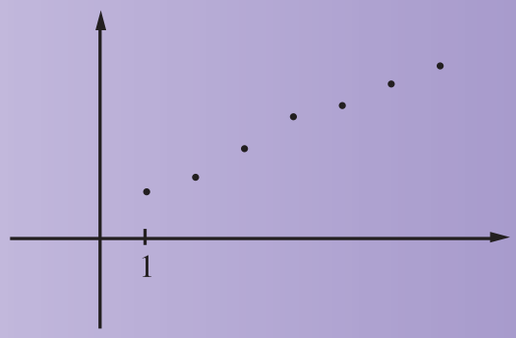
Vastaus

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n - 1$

Aidosti kasvava ja aidosti vähenevä lukujono

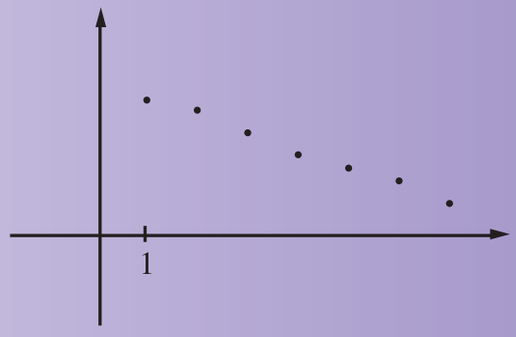
Lukujono (a_n) on *aidosti kasvava*, jos jonon seuraava jäsen on aina edellistä suurempi.

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots$



Lukujono (a_n) on *aidosti vähenevä*, jos jonon seuraava jäsen on aina edellistä pienempi.

$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$



Jos jono on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, se on *aidosti monotoninen*.*

---

* Lukujono (a_n) on *kasvava*, jos $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant \ldots$, ja lukujono on *vähenevä*, jos $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant \ldots$. Jos jono on kasvava tai vähenevä, se on *monotoninen*.

ESIMERKKI 4

Esimerkin 2 a-kohdassa laskettiin jonon $a_n = \frac{3n-1}{n+1}$ viisi ensimmäistä jäsentä. Niiden perusteella näyttää siltä, että jono on aidosti kasvava. Osoita, että jono $a_n = \frac{3n-1}{n+1}$ on aidosti kasvava.

Ratkaisu

Jonon $a_n = \frac{3n-1}{n+1}$ jäsenet ovat funktion $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ arvoja positiivisten kokonaislukujen joukossa $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Siis $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$ jne. Funktion f arvojen suuruusjärjestystä voidaan vertailla, kun tunnetaan funktion f kulku.

Funktio $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ on määritelty ja derivoituva välillä $]-1, \infty[$, joka sisältää positiivisten kokonaislukujen joukon.* Selvitetään funktion f kulku derivaatan avulla.

Derivoidaan funktio f.

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x+1) - (3x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} \qquad \mathrm{D}\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{3x + 3 - 3x + 1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

Koska nimittäjänä oleva lauseke $(x+1)^2$ on neliö, nimittäjä on positiivinen funktion f koko määrittelyjoukossa $]-1, \infty[$. Siis $f'(x) > 0$ välillä $]-1, \infty[$, joten funktio f on aidosti kasvava välillä $]-1, \infty[$. Koska funktio f on aidosti kasvava, niin muuttujan arvojen suuretessa funktion arvot suurenevat. Siis funktion f kaikille arvoille positiivisten kokonaislukujen joukossa $\{1, 2, 3, \ldots\}$ pätee $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots$ eli $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Jono (a_n) on aidosti kasvava. □

---

* Funktion kulkua voidaan tutkia derivaatan avulla ainoastaan lukusuoran väleillä (yhtenäisissä osajoukoissa). Siksi funktiota f on tutkittava välillä, joka sisältää positiivisten kokonaislukujen joukon.

Lukujonon indeksointi voidaan myös aloittaa jostain muusta luvusta kuin 1, esimerkiksi luvusta 0:

$b_0,\ b_1,\ b_2, \ldots$.

Tällainen lukujono vastaa funktiota g, jonka muuttujan arvot ovat luonnollisia lukuja $0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ ja jolle siis $b_n = g(n)$.

Sopivalla indeksoinnilla voidaan yksinkertaistaa jonon kuvailua. Tällöin alaindeksi ei kuitenkaan enää välttämättä ilmaise jäsenen järjestysnumeroa jonossa.

> Jos luonnollisten lukujen neliöiden jono $0,\ 1,\ 4,\ 9, \ldots$ indeksoidaan lähtien nollasta, saadaan jono $b_0,\ b_1,\ b_2, \ldots$, missä $b_n = n^2$. Jonon ensimmäinen jäsen on b_0, toinen b_1 ja yleisesti n. jäsen on b_{n-1}. Jos sama jono indeksoidaan lähtien ykkösestä, niin saadaan jono $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$, missä $a_n = (n-1)^2$.

Seuraavassa, jollei erikseen mainita, jonojen indeksointi aloitetaan luvusta 1.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

203. Määrittele erilaisia jonoja, jotka alkavat $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Määritä erityisesti jonon viisi ensimmäistä jäsentä ja kahdeksas jäsen.

204. Lukujonon ensimmäinen jäsen on luku 3, toinen jäsen luku -5, ja kolmannesta jäsenestä alkaen jonon jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen tulo. Määritä jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.

205. Laske jonon $a_n = \dfrac{4n+3}{2n-1}$ viisi ensimmäistä jäsentä ja viideskymmennes jäsen. Havainnollista jonoa koordinaatistossa.

206. Määritä jonon lauseke $a_n = f(n)$.

a) negatiivisten kokonaislukujen jono $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$

b) parillisten luonnollisten lukujen jono $0,\ 2,\ 4,\ \ldots$

207. Ilmaise jono lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.

a) lukujono $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$, jossa luvut -1 ja 1 vuorottelevat

b) lukujono $-3,\ 9,\ -27,\ 81,\ \ldots$, jonka jäsenten itseisarvot ovat luvun kolme peräkkäisiä potensseja ja joiden merkit vuorottelevat

c) lukujono $5,\ -5,\ 5,\ -5,\ \ldots$, jossa luvut 5 ja -5 vuorottelevat

d) lukujono $10,\ 0,\ 10,\ 0,\ \ldots$, jossa luvut 10 ja 0 vuorottelevat

208. Onko luku 17 jokin jäsen jonossa (v_n), jossa

a) $v_n = \dfrac{19n+9}{n+2}$ b) $v_n = \dfrac{n^2-18}{2n+1}$?

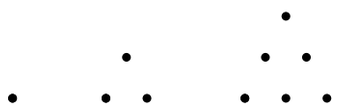
Jos on, niin kuinka mones jonon jäsen luku 17 on?

209. Tutki jonoa $a_n = \dfrac{3n+7}{n+1}$ laskemalla jonon ensimmäisiä jäseniä tai piirtämällä funktion $f(x) = \dfrac{3x+7}{x+1}$ kuvaaja graafisella laskimella. Näyttääkö jono (a_n) aidosti kasvavalta tai aidosti väheneväl tä? Perustele jonon kasvaminen tai väheneminen.

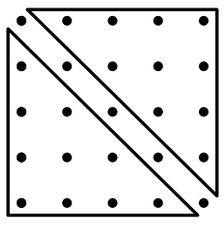
210. Olkoon $a_n = \dfrac{n^3}{n^2+2}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Osoita, että jono (a_n) on aidosti kasvava.

211. Mikä on lukujonon $a_n = n(12200 - n^3)$ suurin jäsen?

212. a) Määritä ns. kolmiolukujen jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.



b) Yleistä alla olevan kuvion geometrinen idea ja määritä kolmiolukujen jonon lauseke $k_n = f(n)$.



c) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa $S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$. Laske summa $S_{764} = 1 + 2 + \ldots + 763 + 764$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

213. Määrittele erilaisia jonoja, jotka alkavat 1, 2, 4, … . Määritä erityisesti jonon viisi ensimmäistä jäsentä ja kahdeksas jäsen.

214. Lukujonon ensimmäinen jäsen on luku 2, toinen jäsen luku 6, ja kolmannesta jäsenestä alkaen jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen keskiarvo. Määritä jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.

215. Määritä jonon (u_n) viisi ensimmäistä jäsentä ja 50. jäsen, kun

a) $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$ b) $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Havainnollista jonoja koordinaatistossa.

216. Jono, jonka kaikki jäsenet ovat yhtä suuria, on *vakiojono*. Tutki, onko jono vakiojono.

a) $a_n = (-1)^n$ b) $b_n = (-1)^{2n}$

c) $c_n = \sin n\pi$ d) $d_n = \cos n\pi$

Ovatko jotkin a–d-kohtien jonoista samoja jonoja?

217. Ilmaise lukujono lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$. Mikä jonon 23. jäsen on?

a) luvulla 5 jaollisten positiivisten kokonaislukujen jono 5, 10, 15, …

b) luvulla 5 jaollisten luonnollisten lukujen jono 0, 5, 10, 15, …

c) lukujono 13, 18, 23, … , jonka jäsen saadaan aina lisäämällä edelliseen jäseneen luku 5

218. Jonon $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots$ jäsenten osoittajat ovat peräkkäisiä parillisia lukuja ja nimittäjät peräkkäisiä parittomia lukuja. Määritä jonon lauseke $a_n = f(n)$.

219. Määritä jonon lauseke. Jonon jäsen saadaan aina edellisestä kertomalla luvulla 5.

a) 5, 25, 125, …

b) 1, 5, 25, …

c) 3, 15, 75, …

220. Kuinka monta negatiivista jäsentä on jonossa $v_1, v_2, v_3, \ldots$, jossa

a) $v_n = \dfrac{5n - 128}{n + 17}$

b) $v_n = \dfrac{3n^2 - 110n + 303}{n}$?

221. Osoita, että

a) jono $a_n = \dfrac{2n + 4}{n + 3}$ on aidosti kasvava

b) jono $b_n = \dfrac{2n + 7}{n + 3}$ on aidosti vähenevä.

222. Osoita, että lukujono $a_n = \ln(3n - 1) - \ln(2n - 1)$ on aidosti vähenevä.

223. Määritä lukujonon $a_n = n + \dfrac{600}{n}$ pienin jäsen.

224. Määritä lukujonon $b_n = \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{10}{n^4}$ kolme suurinta jäsentä.

225. Millä vakion b arvoilla jono $a_n = \dfrac{bn - 3}{n + 4}$ on aidosti vähenevä?

226. Olkoon $a_n = \dfrac{n^{50}}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Määritä jonon (a_n) suurin jäsen.

227. Määritä jonon $a_n = \dfrac{100^n}{n^n}$ suurin jäsen.

228. Jonon (u_n) erotusjono (u_n') määritellään: $u_n' = u_{n+1} - u_n$. Jonon (u_n) toisen kertaluvun erotusjono (u_n'') määritellään:

$u_n'' = u_{n+1}' - u_n'$.

a) Tutki jotain jonoa $u_n = f(n)$, missä f on toisen asteen polynomifunktio ja laske toisen kertaluvun erotusjonon (u_n'') jäseniä. Mitä huomaat?

b) Osoita: Jos $u_n = f(n)$, missä f on toisen asteen polynomifunktio, niin on olemassa nollasta poikkeava vakio α niin, että

$\alpha = u_1'' = u_2'' = u_3'' = \ldots$.

Toisin sanoen: toisen kertaluvun erotusjono on vakiojono. Kuinka vakio α saadaan funktion f lausekkeen kertoimista?

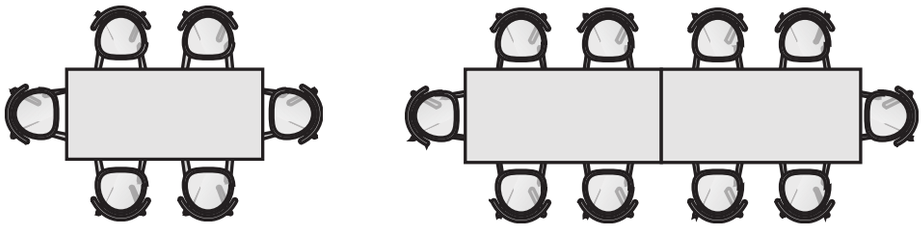
c) Onko olemassa toisen asteen polynomifunktiota f, jolle $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 9$ ja $f(4) = 16$?

d) Voidaan todistaa, että myös b-kohdan tuloksen käänteinen tulos pätee: Jos jonon (u_n) toisen kertaluvun erotusjono (u_n'') on nollasta poikkeava vakiojono, niin on olemassa toisen asteen polynomifunktio f niin, että $u_n = f(n)$ kaikilla n. Käytä tätä hyväksesi ja osoita, että pisteet $(1, -4)$, $(2, 17)$, $(3, 45)$, $(4, 80)$ ja $(5, 122)$ ovat samalla paraabelilla $y = ax^2 + bx + c$. Määritä paraabelin piste, jonka x-koordinaatti on 6. Mikä paraabelin yhtälön toisen asteen kerroin a on?

Aritmeettinen jono

Ongelma

Yhteen pöytään voidaan sijoittaa kuusi päivällisvierasta. Kuinka monta vierasta voidaan sijoittaa pöytiin, kun samanlaisia pöytiä asetetaan peräkkäin a) 2 b) 5 c) 17?



Aritmeettinen jono

Lukujono, jonka jäsenen ja edellisen jäsenen erotus on aina sama, on *aritmeettinen jono*. Jos jonon peräkkäisten jäsenten erotus on d, niin jokainen jonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku d.

$$\begin{array}{cccccc} & +d & +d & +d & +d & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots \end{array}$$

Jos ensimmäinen luku $a_1 = 7$ ja $d = -3$, saadaan aritmeettinen jono $7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5, \ldots$.

Jonon $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$ peräkkäisten jäsenten erotukset ovat $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ jne. Jonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on yleisesti merkittynä $a_{n+1} - a_n$. Jotta jono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$ olisi aritmeettinen, kaikkien erotusten $a_{n+1} - a_n$ tulee olla yhtä suuret.

Jonon aritmeettisuusehto

Jono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$ on aritmeettinen jono, jos ja vain jos on olemassa luku d niin, että

$$a_{n+1} - a_n = d$$

kaikilla n.

Nimityksen aritmeettinen jono taustaan perehdytään tehtävässä 241.

ESIMERKKI 1

Osoita, että lukujono $a_n = 7n - 3$ on aritmeettinen jono.

Ratkaisu

Lasketaan jonon ensimmäisiä jäseniä: 4, 11, 18, 25 jne. Näyttää siltä, että jonon peräkkäisten jäsenten erotus on aina 7. Täydellinen varmuus tästä saadaan muodostamalla ja sieventämällä peräkkäisten jäsenten erotuksen lauseke $a_{n+1} - a_n$.

Jonon $a_n = 7n - 3$ jäsenelle a_{n+1} saadaan lauseke sijoittamalla lausekkeeseen $7n - 3$ n:n paikalle $n + 1$:

$$a_{n+1} = 7(n + 1) - 3.$$

Saadaan:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 7(n + 1) - 3 - (7n - 3) \\ &= 7n + 7 - 3 - 7n + 3 = 7. \end{aligned}$$

Siis

$$a_{n+1} - a_n = 7$$

kaikilla n, joten jono (a_n) on aritmeettinen. □

Aritmeettisen jonon

$$\begin{array}{cccccc} & +d & +d & +d & +d & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots & \end{array}$$

jokainen jäsen saadaan ensimmäisestä jäsenestä a_1 lisäämällä siihen luvun d monikerta.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + 0 \cdot d \\ a_2 &= a_1 + d = a_1 + 1 \cdot d \\ a_3 &= a_1 + d + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_1 + d + d + d = a_1 + 3d \end{aligned}$$

Yleisesti saadaan:

Aritmeettisen jonon *n*. jäsenen kaava

Aritmeettisen jonon

$$\begin{array}{cccccc} & +d & +d & +d & +d & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots & \end{array}$$

n. jäsen a_n saadaan ensimmäisestä jäsenestä a_1 lisäämällä siihen $n-1$ kappaletta lukuja d, eli

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

ESIMERKKI 2

Määritä aritmeettisen jonon $10,\ 4,\ -2,\ \ldots$ lauseke $a_n = f(n)$. Mikä jonon kolmastoista jäsen on?

Ratkaisu

Aritmeettisen jonon $10,\ 4,\ -2,\ \ldots$ seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku -6. Siis jonon n. jäsen on

$a_n = 10 + (n-1) \cdot (-6)$ $\qquad a_n = a_1 + (n-1)d$, missä $a_1 = 10$ ja $d = -6$.

$= 10 - 6n + 6 = 16 - 6n.$

Jonon 13. jäsen on

$a_{13} = 16 - 6 \cdot 13 = -62.$

Vastaus

$a_n = 16 - 6n,\ a_{13} = -62$

ESIMERKKI 3

Aritmeettisen jonon (a_n) ensimmäinen jäsen $a_1 = 9$ ja 16. jäsen $a_{16} = 34$.

a) Mikä jonon viides jäsen a_5 on?

b) Kuinka moni jonon jäsenistä on pienempi kuin 1 000?

Ratkaisu

a) Määritetään ensin jonon (a_n) peräkkäisten jäsenten erotus d. Aritmeettisessa jonossa on $a_1 + 15d = a_{16}$, eli:

$$9 + 15d = 34$$

$$15d = 25$$

$$d = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}.$$

Jonon viides jäsen on

$$a_5 = a_1 + 4d = 9 + 4 \cdot \frac{5}{3} = 9 + \frac{20}{3} = 9 + 6\frac{2}{3} = 15\frac{2}{3}.$$

b) Jonon n. jäsen on $a_n = 9 + (n - 1) \cdot \frac{5}{3}$.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$9 + (n - 1) \cdot \frac{5}{3} < 1000 \qquad \big| \cdot 3 \ (> 0)$$

$$27 + 5(n - 1) < 3000$$

$$5n + 22 < 3000$$

$$5n < 2978 \qquad \big| : 5 \ (> 0)$$

$$n < 595{,}6$$

Viimeinen jonon jäsen, joka on pienempi kuin 1 000, on jäsen a_{595}. Siis jonon jäsenistä 595 ensimmäistä on pienempiä kuin 1 000.

Vastaus

a) $15\frac{2}{3}$ b) 595

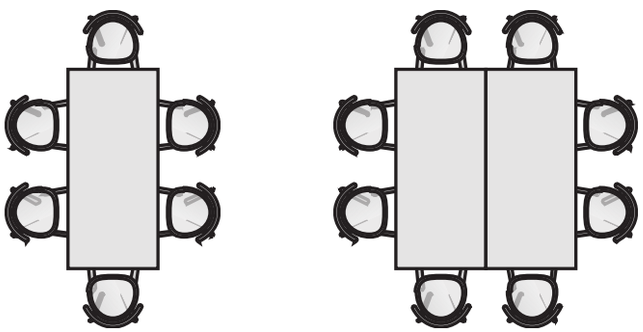
TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

229. Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ensimmäinen jäsen $a_1 = 9$. Määritä jonon viisi ensimmäistä jäsentä, kun tiedetään, että jono on aritmeettinen jono, jossa peräkkäisten jäsenten erotus d on
a) 4 b) -5.

230. Laske jonon $a_n = 15 - 8n$ neljä ensimmäistä jäsentä. Osoita, että jono (a_n) on aritmeettinen muodostamalla ja sieventämällä peräkkäisten jäsenten erotuksen lauseke $a_{n+1} - a_n$.

231. Yhteen pöytään voidaan sijoittaa kuusi päivällisvierasta. Kuinka monta vierasta voidaan sijoittaa pöytiin, kun samanlaisia pöytiä asetetaan vierekkäin a) n kappaletta b) 17 kappaletta?



232. Muodosta aritmeettisen jonon 8, -7, -22, … lauseke $a_n = f(n)$.
Mikä on jonon
a) kuudes b) 60. jäsen?
c) Onko luku -1867 jonon jäsen? Jos on, niin kuinka mones jäsen?

233. Aritmeettisen lukujonon (a_n) seitsemäs jäsen $a_7 = 59$ ja kolmastoista jäsen $a_{13} = 179$. Mikä on jonon a) ensimmäinen jäsen a_1
b) 45. jäsen a_{45}?

234. Kuinka moni aritmeettisen jonon 17, 30, 43, … jäsenistä on pienempi kuin 10 000?

235. Kuinka monta luvulla 7 jaollista kokonaislukua välillä [4500, 7000] on?

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

236. Muodosta aritmeettisen jonon 6, 23, 40, … lauseke $a_n = f(n)$.
Onko luku a) 685 b) 33 921 jonon jäsen? Jos on, niin kuinka mones jonon jäsen luku on?

237. Portaikon ensimmäinen askelma on 12 cm:n korkeudella lattiasta. Muiden askelmien nousut ovat yhtä suuret niin, että 13. askelma on 312 cm:n korkeudella. Millä korkeudella viides askelma on?

238. Aritmeettisen lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ensimmäinen jäsen on $a_1 = 7000$ ja neljäskymmenes jäsen $a_{40} = -2360$. Mikä jonon kahdeskymmenes jäsen a_{20} on?

239. Onko lukujono a_n aritmeettinen? Perustele.
a) $a_n = 19 + 15n$
b) $a_n = n^2 + n$
c) $a_n = 1999 - 19n$

240. Kuinka moni aritmeettisen jonon 5, 12, 19, … jäsenistä on välillä [1000, 2000]?

241. Osoita, että aritmeettisen jonon $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ toisesta jäsenestä alkaen jonon jokainen jäsen on edellisen jäsenen ja seuraavan jäsenen keskiarvo. (Tästä aritmeettisen jonon ominaisuudesta juontaa nimitys aritmeettinen jono, sillä tavallista keskiarvoa kutsutaan usein aritmeettiseksi keskiarvoksi erotukseksi muista keskiarvon käsitteistä.)

242. Kellon osoittimet ovat päällekkäin tasan kello 12. Mihin aikaan osoittimet ovat seuraavan kerran päällekkäin? Anna vastaus sekunnin tarkkuudella.

243. Kuinka moni viisinumeroinen luonnollinen luku on jaollinen
a) luvulla 3
b) luvulla 13
c) luvulla 3 ja luvulla 13
d) luvulla 3 tai luvulla 13?

244. Aritmeettisen jonon (a_n) peräkkäisten jäsenten erotus $a_{n+1} - a_n$ on positiivinen kokonaisluku. Luvut 5, 3 085 ja 6 368 ovat jonon jäseniä. Mikä jonon peräkkäisten jäsenten erotus on?

245. Jono (a_n) alkaa $1,\ 2,\ \ldots$, ja jono (3^{a_n}) on aritmeettinen.
a) Määritä jonon (a_n) viisi ensimmäistä jäsentä.
b) Monesko jonon (a_n) jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on suurempi kuin 10?

246. Jono (a_n) alkaa $2,\ 3,\ \ldots$, ja jono $(\ln a_n)$ on aritmeettinen. Määritä jonon kolmas ja neljäs jäsen ja jonon lauseke $a_n = f(n)$.

Geometrinen jono

Ongelma

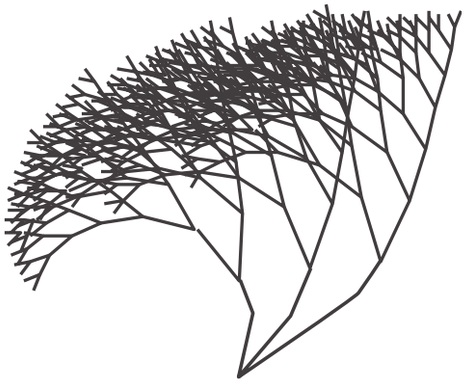
Pensaan kasvu alkaa kolmesta oksasta, joista jokainen seuraavana vuotena haarautuu kahdeksi oksaksi, jotka taas seuraavana vuotena haarautuvat kahdeksi oksaksi ja niin edelleen.

ensimmäinen vuosi

toinen vuosi

kolmas vuosi

Kuinka monta latvaoksaa pensaassa on kahdeksantena vuotena?



kahdeksas vuosi

Geometrinen jono

Lukujono, jonka jokaisen jäsenen suhde edelliseen jonon jäseneen on yhtä suuri, on *geometrinen jono*. Jos suhde on q, niin jonon jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen luvulla q.*

$$\begin{array}{cccccc} & \cdot q & & \cdot q & & \cdot q \\ a_1, & & a_2, & & a_3, & a_4, \ldots \end{array}$$

Jos ensimmäinen jäsen $a_1 = 7$ ja $q = -3$, kyseessä on geometrinen jono $7,\ -21,\ 63, \ldots$.

Jonon $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ jäsenen ja edellisen jäsenen suhde on yleisesti merkittynä $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Jotta jono $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ olisi geometrinen, kaikkien suhteiden $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tulee olla yhtä suuret.

Jonon geometrisuusehto

Jono $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ on geometrinen jono, jos ja vain jos on olemassa luku q niin, että

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kaikilla n.

Nimityksen geometrinen jono taustaan perehdytään tehtävässä 268.

---

* Myös jono $a_1,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots$, jossa jäsenet saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 0, luetaan geometristen jonojen joukkoon, vaikka jonon peräkkäisten jäsenten suhde ei olekaan määritelty.

ESIMERKKI 1

Osoita, että lukujono $a_n = 5 \cdot 3^{2n}$ on geometrinen jono.

Ratkaisu

Jos lasketaan jonon ensimmäisiä jäseniä 45, 405, 3 645, 32 805 jne. ja niiden suhteet, niin näyttää siltä, että jonon peräkkäisten jäsenten suhde on aina 9. Täydellinen varmuus tästä saadaan muodostamalla ja sieventämällä jäsenten suhteen lauseke $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot 3^{2(n+1)}}{5 \cdot 3^{2n}} \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$= \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$= 3^{2n+2-2n} = 3^2 = 9$$

Siis $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 9$ kaikilla n, joten jono on geometrinen. □

Geometrisen jonon

$$\begin{array}{cccccc} & \cdot q & \cdot q & \cdot q & \cdot q & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots & \end{array}$$

jokainen jäsen saadaan ensimmäisestä jäsenestä kertomalla luvun q potenssilla.

$$a_1 = 1a_1 = q^0 a_1$$

$$a_2 = qa_1 = q^1 a_1$$

$$a_3 = qqa_1 = q^2 a_1$$

$$a_4 = qqqa_1 = q^3 a_1$$

Yleisesti pätee:

Geometrisen jonon *n*. jäsenen kaava

Geometrisen jonon

$$\begin{array}{cccccc} & \cdot q & & \cdot q & & \cdot q \\ a_1, & & a_2, & & a_3, & a_4, \ldots \end{array}$$

n. jäsen a_n saadaan ensimmäisestä jäsenestä a_1 kertomalla se $n-1$ kertaa luvulla q eli

$$a_n = q^{n-1}\, a_1.$$

ESIMERKKI 2

Ilmaise geometrinen jono $2000,\ 1500,\ 1125, \ldots$ lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$. Määritä kahden desimaalin tarkkuudella jonon kolmastoista jäsen.

Ratkaisu

Geometrisessa jonossa, joka alkaa $2000,\ 1500,\ 1125, \ldots$, peräkkäisten jäsenten suhde on $q = \dfrac{1\,500}{2\,000} = \dfrac{1\,125}{1\,500} = 0{,}75$. Jonon jäsen saadaan aina edellisestä kertomalla luvulla $q = 0{,}75$.

Jonon lauseke on

$a_n = 0{,}75^{n-1} \cdot 2000.$ $\quad a_n = q^{n-1}\, a_1$, missä $q = 0{,}75$ ja $a_1 = 2000$.

Jonon 13. jäsen on

$a_{13} = 0{,}75^{12} \cdot 2000 \approx 63{,}35.$

Vastaus

$a_n = 0{,}75^{n-1} \cdot 2000,\ a_{13} \approx 63{,}35$

ESIMERKKI 3

Geometrisen jonon (a_n) ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja 25. jäsen $a_{25} = 150$. Määritä

a) jonon peräkkäisten jäsenten suhde q

b) jonon yhdeksäs jäsen a_9.

Ratkaisu

a) Jos geometrisen jonon (a_n) peräkkäisten jäsenten suhde on q, niin jonon 25. jäsen on

$$a_{25} = q^{24}a_1.$$

Koska $a_1 = 3$ ja $a_{25} = 150$, saadaan yhtälö.

$$q^{24} \cdot 3 = 150 \qquad | : 3$$

$$q^{24} = 50$$

Eksponentti on parillinen, joten yhtälöllä on kaksi juurta.

$$q = \sqrt[24]{50} \quad \text{tai} \quad q = -\sqrt[24]{50}$$

Yhtälön $q^{24} = 50$ juuret voidaan ilmaista myös murtopotensseina.

$$q = 50^{\frac{1}{24}} \quad \text{tai} \quad q = -50^{\frac{1}{24}}$$

b) Jonon yhdeksäs jäsen on

$$a_9 = q^8 a_1.$$

Koska eksponentti 8 on parillinen, molemmat q:n arvot johtavat samaan yhdeksännen jäsenen arvoon.

$$a_9 = q^8 a_1 = (50^{\frac{1}{24}})^8 \cdot 3$$

Juurilausekkeet on yksinkertaisinta sieventää murtopotenssimuodossa.

$$= 50^{\frac{8}{24}} \cdot 3 = 3 \cdot 50^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{50}$$

Vastaus

a) $q = \sqrt[24]{50}$ tai $q = -\sqrt[24]{50}$ b) $a_9 = 3\sqrt[3]{50}$

ESIMERKKI 4

Kuinka moni geometrisen jonon $100,\ \frac{2}{3} \cdot 100,\ \ldots$ jäsenistä on suurempi kuin $0{,}01$?

Ratkaisu

Geometrisen jonon $100,\ \frac{2}{3} \cdot 100,\ \ldots$ n. jäsen on $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 100$.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 100 > 0{,}01 \qquad \big| : 100 \ (> 0)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} > 0{,}0001$$

Otetaan molemmista puolista kymmenkantaiset logaritmit. Koska funktio $\lg x$ on aidosti kasvava, epäyhtälön suunta säilyy.*

$$\lg \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} > \lg 0{,}0001$$

Potenssin logaritmikaava $\lg a^r = r \lg a$.

$$(n-1) \lg \frac{2}{3} > \lg 0{,}0001 \qquad \big| : \lg \frac{2}{3} \approx -0{,}18 \ (< 0)$$

$$n - 1 < \frac{\lg 0{,}0001}{\lg \frac{2}{3}}$$

$$n < \frac{\lg 0{,}0001}{\lg \frac{2}{3}} + 1 \approx 23{,}7$$

Jonon viimeinen jäsen, joka on suurempi kuin $0{,}01$, on jonon 23. jäsen. Jonon 23 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin $0{,}01$.

Vastaus 23

---

* Voidaan käyttää myös luonnollista logaritmia $\ln x$.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

247. Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ensimmäinen jäsen $a_1 = 9$. Määritä jonon viisi ensimmäistä jäsentä, kun tiedetään, että jono on geometrinen jono, jossa jäsenen ja edellisen jäsenen suhde q on a) -2 b) $\frac{2}{3}$.

248. Laske jonon $a_n = 10 \cdot 2^{3n}$ neljä ensimmäistä jäsentä. Osoita, että jono (a_n) on geometrinen muodostamalla ja sieventämällä peräkkäisten jäsenten suhteen lauseke $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

249. Mikä geometrisen jonon $1000, 400, 160, \ldots$ seitsemäs jäsen on?

250. Ensimmäisenä tutkimusvuotena tuotteen keskihinta a_1 oli 1 200 euroa, minkä jälkeen hinta nousi joka vuosi 5,2 %. Olkoon a_n keskihinta n. vuotena.
a) Mikä hinta oli neljäntenä vuotena?
b) Määritä jonon (a_n) lauseke ja laske hinta 12. vuotena.

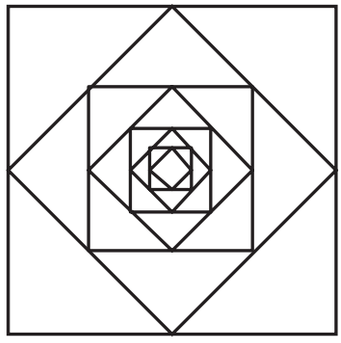
251. a) Mikä on peräkkäisten jäsenten suhde q geometrisessa jonossa, joka alkaa $900, -1200, 1600, \ldots$?
b) Muodosta jonon lauseke.
c) Laske neljän numeron tarkkuudella jonon 80. jäsen.

252. Geometrisen jonon (a_n) ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$ ja seitsemäs jäsen $a_7 = 54$. Määritä
a) jonon peräkkäisten jäsenten suhde q
b) jonon jäsenet a_5 ja a_{10}.

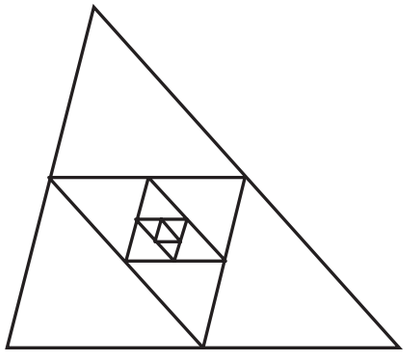
253. Olkoon (a_n) geometrinen jono, jonka peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Millä q:n arvoilla jono (a_n) on aidosti kasvava ja millä q:n arvoilla aidosti vähenevä, kun a) $a_1 > 0$ b) $a_1 < 0$? Päättele ongelman ratkaisu erilaisilla luvuilla kokeilemalla. Yleisiä perusteluita ei tarvita.

254. Kuinka moni geometrisen jonon $12, 0{,}98 \cdot 12, 0{,}98^2 \cdot 12, \ldots$ jäsenistä on suurempi kuin 3?

255. a) Yhdistämällä aina neliön sivujen keskipisteet saadaan jono sisäkkäisiä neliöitä. Kuinka mones neliö on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin miljoonasosa alkuperäisen neliön pinta-alasta?



b) Yhdistämällä aina kolmion sivujen keskipisteet saadaan jono sisäkkäisiä kolmioita. Kuinka mones kolmio on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin miljoonasosa ensimmäisen kolmion pinta-alasta?



256. Puumäärä metsäpalstalla ensimmäisen seurantavuoden alussa oli $500\ \text{m}^3$. Puumäärä lisääntyy joka vuosi vuosikasvun johdosta $5{,}0\ \%$, ja joka syksy kasvukauden jälkeen puustosta hakataan $4{,}0\ \%$. Mikä on n. vuonna
a) puumäärä vuoden alussa
b) puumäärä kasvukauden jälkeen ennen hakkuita
c) hakkuiden suuruus?
d) Kuinka monentena vuonna hakkuiden suuruus ensimmäisen kerran ylittää $30\ \text{m}^3$?

257. Olkoon $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ aritmeettinen jono, jossa $a_{n+1} - a_n = d$ kaikilla n. Olkoon k positiivinen luku. Osoita, että jono

$k^{a_1},\ k^{a_2},\ k^{a_3}, \ldots$ on geometrinen. Mikä jonon

$k^{a_1},\ k^{a_2},\ k^{a_3}, \ldots$ peräkkäisten jäsenten suhdeluku q on?

258. Olkoon $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ geometrinen jono, jonka ensimmäinen jäsen a_1 samoin kuin peräkkäisten jäsenten suhde $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ on positiivinen. Osoita, että jäsenten luonnollisten logaritmien jono $\ln a_1,\ \ln a_2,\ \ln a_3, \ldots$ on aritmeettinen. Mikä jonon $\ln a_1,\ \ln a_2,\ \ln a_3, \ldots$ peräkkäisten jäsenten erotus d on? Päteekö vastaava tulos myös kymmenkantaisille tai yleisemmin muille logaritmeille?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

259. a) Mikä peräkkäisten jäsenten suhde q on geometrisessa jonossa, joka alkaa
$36,\ 24,\ 16, \ldots$?
b) Ilmaise jono lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.
c) Määritä jonon 20. jäsen.

260. Olkoon a_1 ensimmäisen työvuoden palkka, a_2 toisen työvuoden palkka jne. Määritä jonon $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ neljä ensimmäistä jäsentä ja jäsen a_n, kun $a_1 = 24\,000$ ja palkka nousee joka vuosi a) 500 euroa b) 3 %.
Millainen jono on kyseessä?

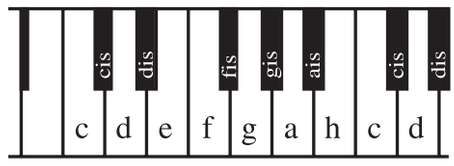
261. Ensimmäisenä kesänä pihaan kasvoi yksi yksivuotinen satukukka. Kukka teki 10 siementä, joista kahdeksan iti toisena kesänä. Jokainen näistä kukista teki taas 10 siementä, joista kahdeksan iti kolmantena kesänä jne. Kuinka monta satukukkaa pihassa oli a) kahdeksantena
b) 18. kesänä?

262. Onko lukujono (a_n) aritmeettinen tai geometrinen jono? Perustele.
a) $a_n = 3n + 2$ b) $a_n = n^3$
c) $a_n = \dfrac{7}{5^{n-1}}$ d) vakiojono $a_n = 3$

263. Luvut $a,\ a^2 + 1$ ja $a^3 + 3$ ovat erään geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä.
Määritä a.

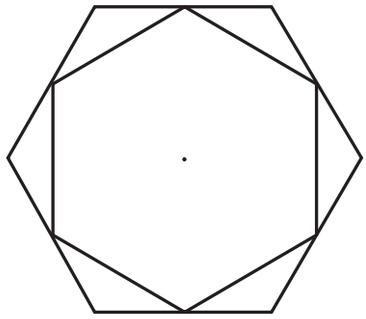
264. Geometrisen jonon (a_n) kuudes jäsen $a_6 = 20$ ja yhdestoista jäsen $a_{11} = 80$. Määritä jonon ensimmäiset jäsenet a_1 ja a_2.

265. Erään pianon kielten pituudet puolisävelaskelittain muodostavat geometrisen jonon niin, että oktaavia (12 puolisävelaskelta) alemman sävelen kielen pituus on aina kaksinkertainen. Keski-a-sävelen kielen pituus on 42 cm. Kuinka pitkä lähinnä alemman c-sävelen kieli on?



266. Kuinka moni geometrisen jonon $7,\ 21,\ 63,\ \ldots$ jäsenistä on pienempi kuin 10^{10}?

267. Yhdistämällä aina säännöllisten kuusikulmioiden sivujen keskipisteet saadaan jono sisäkkäisiä kuusikulmioita. Kuinka mones kuusikulmio on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin miljoonasosa alkuperäisen kuusikulmion pinta-alasta?



268. Kahden positiivisen luvun geometrinen keskiarvo on lukujen tulon neliöjuuri. (Yleisemmin positiivisten lukujen geometrinen keskiarvo on lukujen tulon n. juuri, kun lukuja on n kappaletta.) Osoita, että jos geometrisen jonon jäsenet ovat positiivisia, niin toisesta jäsenestä alkaen jokainen jonon jäsen on edellisen ja seuraavan jäsenen geometrinen keskiarvo. Nimitys geometrinen jono juontaa tästä jonon ominaisuudesta.

269. Noppaa heitetään, kunnes tulee kuutonen.
a) Olkoon p_n todennäköisyys, että ensimmäinen kuutonen tulee n. heitolla. Laske jonon $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots$ neljä ensimmäistä jäsentä ja n. jäsen.
b) Kuinka pitkät ensimmäisen kuutosen saamiseksi tarvittavat heittosarjat ovat niin harvinaisia, että niiden todennäköisyys on pienempi kuin 0,01?

270. Monia suureita mitataan sekä fysikaalisella mitta-asteikolla että siitä muodostetulla logaritmisella asteikolla. Esimerkiksi tyypillinen valokuvausfilmin herkkyyslukema on $200/24°$, missä ensimmäinen luku 200 on filmin herkkyys fysikaalisella asteikolla ja jälkimmäinen luku $24°$ filmin herkkyys logaritmisella asteikolla. Logaritmisen asteikon lukema $S°$ saadaan fysikaalisesta lukemasta S muunnoksella $S° = 1 + 10 \lg S$. Tällaisissa tilanteissa kansanvälinen standardisointijärjestö ISO suosittelee, että tuotantostandardeissa yms. käytetään sellaisia fysikaalisen asteikon mittalukuja, jotka muodostavat geometrisen jonon. Valokuvausfilmien valmistuksessa rajoitutaan 30:een fysikaalisen asteikon herkkyyslukuun, joista viidestoista on 100 ja kahdeskymmenesviides 1 000. Mitkä ovat välillä 100:sta 1000:een olevat herkkyysluvut ja vastaavat logaritmisen asteikon lukemat? Mikä on pienin ja mikä suurin käytössä oleva herkkyysluku?

271. Jono alkaa $2,\ 8,\ \ldots$ ja jonon jäsenten logaritmit muodostavat geometrisen jonon. Laske jonon neljä ensimmäistä jäsentä. Monesko jonon jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on suurempi kuin $10^{10^{10}}$?

Rekursiivinen jono

Ongelma

Heikki kertoi toukokuun ensimmäisenä päivänä juorun yhdelle tuttavalleen, joka kertoi juorun seuraavana päivänä yhdelle ja tätä seuraavana päivänä toiselle. Oletetaan, että jokainen juorun kuulija toimi samalla tavalla: juorun kuultuaan kertoi sen seuraavana päivänä yhdelle ja tätä seuraavana päivänä toiselle. Kuinka moni kuuli juorun

a) toukokuun toisena, kolmantena, neljäntenä ja viidentenä päivänä
b) toukokuun 10. päivänä?

JOHDANTOESIMERKKI 1

Tietokonevirus tarttui ensimmäisenä päivänä yhteen yrityksen tietokoneeseen, josta se toisena päivänä tarttui yhteen ja kolmantena taas yhteen tietokoneeseen. Virus jatkoi leviämistään samalla tavalla: tartunnan saanut kone tartutti tartuntaa seuraavana päivänä yhden ja tätä seuraavana päivänä yhden koneen.

a) Kuinka moni kone sai tartunnan 12. päivänä?
b) Kuvaile tartunnan saaneiden koneiden lukumäärän ilmaiseva lukujono.

Ratkaisu

a) Taulukoidaan päivä kerrallaan tartunnan saavien koneiden lukumäärä.

Ensimmäisenä päivänä tartunnan sai yksi kone, joka toisena päivänä levitti tartunnan yhteen koneeseen.

päivä	1	2	3	4	5
tartuntoja	1	1			

Kolmantena päivänä tartunnan sai kaksi konetta.

päivä	1	2	3	4	5
tartuntoja	1	1	2		

Neljäntenä päivänä tartunnan sai $1 + 2 = 3$ konetta ja viidentenä päivänä $3 + 2 = 5$ konetta.

päivä	1	2	3	4	5
tartuntoja	1	1	2	3	5

Lukujonossa, joka kuvaa tartunnan saavien koneiden lukumäärää, jokainen jäsen kolmannesta jäsenestä alkaen on kahden edellisen jäsenen summa. Jono jatkuu

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … .

12. päivänä tartunnan sai 144 tietokonetta.

b) Olkoon a_1, a_2, a_3, … a-kohdan lukujono. Kolmannesta jäsenestä alkaen jonon jäsenet lasketaan edellisten jäsenten avulla. Jono on rekursiivinen lukujono. Jono voidaan kuvailla seuraavasti:

Jonon alku:

$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ — Kaksi ensimmäistä jäsentä ovat ykkösiä.

Rekursiokaava:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \text{kun}\ n \geqslant 3$ — Kolmannesta jäsenestä lähtien jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen summa.

n. jäsen
edellinen jäsen
edellistä edellinen jäsen

Siis

$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \text{kun}\ n \geqslant 3.$

Vastaus a) 144 b) $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \text{kun}\ n \geqslant 3$

Esimerkin 1 jono on kuuluisa *Fibonaccin jono*, jonka esitti kaniinien lisääntymistä pohtiessaan italialainen matemaatikko ja kauppias Leonardo Fibonacci (n. 1170 – n. 1250), tunnettu myös nimellä Leonardo Pisalainen.

Jonon rekursiokaavassa voitaisiin käyttää myös erilaisia indeksointeja:

$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ ja $a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$ kun $n \geqslant 2$, tai

$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ ja $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$ kun $n \geqslant 1$.

Rekursiivinen lukujono

Rekursiivinen lukujono kuvaillaan ilmoittamalla jonon ensimmäinen jäsen (ensimmäiset jäsenet) ja antamalla *rekursiokaava*, joka ilmaisee, kuinka muut jäsenet lasketaan edellisten jäsenten avulla.

ESIMERKKI 2

Määritä jonon (a_n) viisi ensimmäistä jäsentä, kun

a) $a_1 = 5$ ja $a_n = 2a_{n-1} + n$, kun $n \geqslant 2$

b) $a_1 = 4,\ a_2 = 12$ ja $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, kun $n \geqslant 3$.

Ratkaisu

a) Jonon ensimmäinen jäsen on luku 5. Toisesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa $a_n = 2a_{n-1} + n$, eli jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 2 ja lisäämällä tuloon jäsenen järjestysnumero.

$a_1 = 5$

$a_2 = 2 \cdot a_1 + 2 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$

$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 = 2 \cdot 12 + 3 = 27$

$a_4 = 2 \cdot 27 + 4 = 58$

$a_5 = 2 \cdot 58 + 5 = 121$

b) Jonon ensimmäinen jäsen on 4, toinen jäsen 12 ja kolmannesta jäsenestä lähtien $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, eli jäsen on kahden edeltävän jäsenen keskiarvo.

$a_1 = 4$

$a_2 = 12$

$a_3 = \frac{12 + 4}{2} = 8$

$a_4 = \frac{8 + 12}{2} = 10$

$a_5 = \frac{10 + 8}{2} = 9$

Vastaus a) $5,\ 12,\ 27,\ 58,\ 121$ b) $4,\ 12,\ 8,\ 10,\ 9$

ESIMERKKI 3

Hakkuusuunnitelman toteuttamisen alkaessa puumäärä metsäpalstalla on ensimmäisen vuoden alussa $1\,700\ \text{m}^3$. Puumäärä lisääntyy joka kasvukausi $4\ \%$, ja kasvukauden jälkeen syksyllä puustoa hakataan $50\ \text{m}^3$.
a) Kuvaile rekursiivisesti lukujono (a_n), jonka jäsen a_n ilmaisee puumäärän n. vuoden alussa.
b) Kuinka monennen vuoden alussa puumäärä ensimmäisen kerran ylittää $2\,000\ \text{m}^3$?

Ratkaisu a) Jonon ensimmäinen jäsen on 1700.

$a_1 = 1700$

Puumäärä lisääntyy $4\ \%$, minkä jälkeen hakataan $50\ \text{m}^3$. Puumäärä toisen vuoden alussa on

$a_2 = 1{,}04 \cdot 1700 - 50 = 1718.$

Toisena vuotena puun määrä lisääntyy jälleen $4\ \%$, minkä jälkeen hakataan $50\ \text{m}^3$. Puumäärä kolmannen vuoden alussa on

$a_3 = 1{,}04 \cdot 1718 - 50 = 1736{,}72.$

Toisesta jäsenestä alkaen jonon jäsenet voidaan laskea niin, että edellinen jäsen kerrotaan luvulla 1,04 ja tulosta vähennetään 50. Siis

$a_1 = 1700$ ja $a_n = 1{,}04a_{n-1} - 50$, kun $n \geqslant 2$.

b) Lasketaan jonon jäseniä käyttämällä hyväksi laskimen [Ans] -näppäintä.* Jäsenet kirjataan paperille samalla sopivasti pyöristäen.

$a_1 = 1700$
$a_2 = 1718$
$a_3 \approx 1737$
$a_4 \approx 1756$
$a_5 \approx 1776$
$a_6 \approx 1797$
$a_7 \approx 1819$
$a_8 \approx 1842$
$a_9 \approx 1866$
$a_{10} \approx 1890$
$a_{11} \approx 1916$
$a_{12} \approx 1943$
$a_{13} \approx 1970$
$a_{14} \approx 1999$
$a_{15} \approx 2029$

Puun määrä ylittää 2 000 m^3 ensimmäisen kerran 15. vuoden alussa.

Vastaus a) $a_1 = 1700$ ja $a_n = 1{,}04a_{n-1} - 50$, kun $n \geqslant 2$ b) 15. vuoden alussa

---

* Syötetään ja "lasketaan" jonon ensimmäinen jäsen. — 1700 [Enter]

Syötetään rekursiokaava niin, että edellisen jäsenen paikalla on [Ans]. — 1.04 [×] [Ans] [−] 50

Näppäimellä [Enter] saadaan aina jonon seuraava jäsen. — [Enter] [Enter]

Jos laskimessa ei ole [Ans] -näppäintä, niin laskimen näyttöön tullut edellinen jäsen kerrotaan laskinta välillä nollaamatta luvulla 1,04 ja tulosta vähennetään 50.

ESIMERKKI 4

Ilmaise rekursiivinen jono lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.
a) $a_1 = 5$ ja $a_n = 3a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$
b) $a_1 = 1$ ja $a_n = na_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$

Ratkaisu

a) Jonon

$a_1 = 5$ ja $a_n = 3a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$

jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen luvulla 3:

5, 15, 45, 135, … .

Jono on geometrinen jono, jonka ensimmäinen jäsen on 5 ja peräkkäisten jäsenten suhde 3. Siis

$a_n = 3^{n-1} \cdot 5$.

b) Jonon

$a_1 = 1$ ja $a_n = na_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$

n. jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen jäsenen järjestysnumerolla n.

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot 1$

$a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

jne.

Jonon n. jäsen on luvun n kertoma.

$a_n = n!$

Vastaus

a) $a_n = 3^{n-1} \cdot 5$ b) $a_n = n!$

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

272. Laske lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

a) $a_1 = 3,\ a_2 = 5$ ja
$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, kun $n \geqslant 3$

b) $b_1 = 1$ ja $b_n = b_{n-1} + 2n - 1$, kun $n \geqslant 2$

273. Määritä lukujonon
$a_1 = 0,\ a_2 = 2$
ja
$a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$, kun $n \geqslant 1$,
kuusi ensimmäistä jäsentä ja 120. jäsen.

274. Eläinpopulaation suuruus ensimmäisen seurantavuoden alussa oli 5 000. Populaatio kasvaa joka vuosi 30 %, mutta kannasta muuttaa pois joka vuoden lopussa 1 000 jäsentä.

a) Kuvaile rekursiivisesti lukujono (a_n), jonka jäsen a_n ilmaisee populaation suuruuden n. vuoden alussa.

b) Kuinka monennen vuoden alussa populaation suuruus ensimmäisen kerran on suurempi kuin 20 000?

275. Jono (a_n) on määritelty rekursiivisesti. Laske jonon neljä ensimmäistä jäsentä. Millainen jono on kyseessä? Ilmaise jono lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.

a) $a_1 = 7$ ja $a_n = 4a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$

b) $a_1 = 5$ ja $a_n = a_{n-1} + 3$, kun $n \geqslant 2$

276. Pankkitilille, jonka vuotuinen korko on 4,00 %, talletetaan peräkkäisten vuosien alussa joka vuosi 5 000 euroa. Olkoon a_n talletuksen arvo n. vuoden alussa, kun tiliin on juuri lisätty edellisen vuoden korko ja tilille on tehty uusi 5 000 euron talletus ($a_1 = 5000$).

a) Kuvaile jono (a_n) rekursiivisesti.

b) Mikä talletuksen arvo on kahdeksannen vuoden alussa?

c) Kuinka monennen vuoden alussa talletuksen arvo ensimmäisen kerran ylittää 100 000 euroa?

(Talletuksen kertymistä tutkitaan myös luvussa Geometrinen summa, jossa opitaan määrittämään jonon (a_n) lauseke $a_n = f(n)$.)

277. Tietokonevirus tarttui ensimmäisenä päivänä yhteen yrityksen tietokoneeseen, josta se toisena päivänä tarttui yhteen ja neljäntenä päivänä taas yhteen tietokoneeseen. Virus jatkoi leviämistään samalla tavalla: tartunnan saanut kone tartutti tartuntaa seuraavana päivänä yhden ja kaksi päivää tämän jälkeen toisen koneen.

a) Kuvaile rekursiivisesti jono (a_n), missä a_n on n. päivänä tartunnan saavien koneiden lukumäärä.

b) Kuinka moni tietokone saa tartunnan 13. päivänä?

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

278. Laske lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

a) $a_1 = 3$ ja $a_n = \dfrac{2}{a_{n-1}}$, kun $n \geqslant 2$

b) $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 2^{n+1}$, kun $n \geqslant 2$

279. Laske lukujonon (a_n) kymmenes jäsen, kun
$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1$ ja
$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$, kun $n \geqslant 1$.

280. Eläinpopulaation suuruus kasvaa joka vuosi kesän lisääntymiskauden aikana 7 %, minkä lisäksi kantaan muuttaa joka vuoden lopussa 50 uutta jäsentä. Ensimmäisen seurantavuoden alussa populaation suuruus oli 2 000 jäsentä.
a) Kuvaile rekursiivisesti lukujono (a_n), jonka jäsen a_n ilmaisee populaation suuruuden n. vuoden alussa.
b) Kuinka monennen vuoden alussa populaatio ensimmäisen kerran on suurempi kuin 4 000?

281. Ilmaise jono lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.

a) $a_1 = 1$ ja $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{3}$, kun $n \geqslant 2$

b) $a_1 = 5$ ja $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$, kun $n \geqslant 2$

282. Kun Einari siirtyi vuoden alusta eläkkeelle, hänellä oli pankissa 50 000 euroa sijoitettuna tilille, jonka vuotuinen korko on 6 %. Korko lisätään pääomaan aina vuoden lopussa. Toisesta eläkevuodesta alkaen hän nostaa joka vuoden alussa tililtä 6 000 euroa. Kuinka monentena eläkevuotena tili tyhjenee?

283. Pankkitilille, jonka vuotuinen korko on 3,50 %, talletetaan peräkkäisten vuosien alussa joka vuosi 4 000 euroa. Olkoon a_n talletuksen arvo n. vuoden lopussa, kun tiliin on juuri lisätty päättyvän vuoden korko.
a) Kuvaile jono (a_n) rekursiivisesti.
b) Mikä talletuksen arvo on kahdeksannen vuoden lopussa?
c) Kuinka monennen vuoden lopussa talletuksen arvo ensimmäisen kerran ylittää 80 000 euroa?

284. Laske jonon viisi ensimmäistä jäsentä. Mitä huomaat? Perustele, miksi näin on.
a) $a_1 = 3,\ a_2 = 6$ ja

$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_{n-1}}$, kun $n \geqslant 2$

b) $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ ja
$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$

285. Jonon (a_n) jäsen a_n ilmaisee, kuinka monella eri tavalla luku n voidaan ilmaista summana, jonka yhteenlaskettavat ovat vain lukuja 1 ja 2. Eri tapoina pidetään myös niitä, joissa samat yhteenlaskettavat ovat eri järjestyksessä, esimerkiksi $1 + 2 + 1 = 4$ ja $1 + 1 + 2 = 4$ ovat eri tapoja.
a) Kuvaile lukujono (a_n) rekursiivisesti.
b) Kuinka monella tavalla luku 12 voidaan ilmaista summana, jonka yhteenlaskettavat ovat lukuja 1 ja 2?
c) Kuinka monella eri tavalla voidaan nousta 13-askelmainen portaikko, jos astutaan yksi tai kaksi askelmaa kerrallaan?

286. Kuinka monella eri tavalla luku 12 voidaan ilmaista lukujen 1, 2 ja 3 summana?

287. Kirjoita jonon

a) $a_1 = 1$ ja $a_n = (1 - \dfrac{1}{n})a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$

b) $a_1 = 1$ ja $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\, a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$

ensimmäisiä jäseniä. Päättele jonon lauseke $a_n = f(n)$. Jonossa tapahtuva ilmiö on niin sanottu *teleskooppi* (kokoon menevää mallia).

Aritmeettinen summa

Ongelma

Huomaa nopea tapa laskea aritmeettisen jonon 19, 30, 41, … yhdeksän ensimmäisen jäsenen summa. Suorita lasku loppuun. Mihin havaintoon laskutapa perustuu?

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} S = & 19 + & 30 + & 41 + & 52 + & 63 + & 74 + & 85 + & 96 + & 107 \\ S = & 107 + & 96 + & 85 + & 74 + & 63 + & 52 + & 41 + & 30 + & 19 \\ \hline 2S = & 126 + & 126 + & 126 + & 126 + & 126 + & 126 + & 126 + & 126 + & 126 \end{array}$$

Aritmeettinen summa

Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan *aritmeettiseksi summaksi*.

Päätellään kaava, jolla voidaan laskea aritmeettisen summan $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ arvo.

Koska jono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ on aritmeettinen, summan $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ jokainen yhteenlaskettava saadaan edellisestä lisäämällä siihen sama luku d.

Tällöin ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan summa $a_1 + a_n$ on yhtä suuri kuin toisen ja toiseksi viimeisen yhteenlaskettavan summa $a_2 + a_{n-1}$ ja edelleen yhtä suuri kuin kolmannen ja kolmanneksi viimeisen yhteenlaskettavan summa $a_3 + a_{n-2}$ jne.

$a_2 = a_1 + d,\ a_{n-1} = a_n - d$, joten
$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$.
Vastaavasti $a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ jne.

Kirjoitetaan aritmeettinen summa sekä alkuperäisessä muodossa että käännetyssä järjestyksessä ja lasketaan summat yhteen termeittäin.

$$\begin{array}{rlllllll} S_n = & a_1 & + & a_2 & + \ \ldots \ + & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + \ \ldots \ + & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2S_n = & \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ \ldots \ + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}_{n \text{ kappaletta}} & & & & & & \end{array}$$

Jokainen sulkeisiin merkitty summa on yhtä suuri kuin $a_1 + a_n$. Siis:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \qquad \big| : 2$$

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Aritmeettisen summan laskukaava

Aritmeettisen summan $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ arvo voidaan laskea kaavalla

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Kaavassa

a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava,
a_n on viimeinen yhteenlaskettava,
n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Kaavan mukaan:

Aritmeettisen summan arvo on ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

Summamerkki $\sum$

Lukujonon peräkkäisten jäsenten summa merkitään usein summamerkin $\sum$ avulla. Merkki on kreikan aakkosten iso sigma.
Summamerkin alle merkitään, mistä jonon jäsenestä summa alkaa, ja ylös, mihin summa päättyy. Esimerkiksi:

Merkintä $\sum_{k=4}^{8} a_k$ tarkoittaa summaa $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$.

Merkintä $\sum_{n=3}^{6} \frac{1}{n}$ tarkoittaa summaa $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

Jos jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on aritmeettinen, niin edellä johdettu summakaava voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

ESIMERKKI 1

Koulun juhlasalissa on 16 penkkiriviä. Ensimmäisellä penkkirivillä on 21 istuinta ja seuraavalla rivillä aina kolme istuinta enemmän kuin edellisellä. Kuinka monta istumapaikkaa juhlasalissa on?

Ratkaisu

Istuinten lukumäärät penkkiriveillä ovat peräkkäisiä jäseniä aritmeettisessa jonossa $21, 24, 27, \ldots$.

Viimeisellä 16. rivillä on istuimia $21 + 15 \cdot 3 = 66$.

Aritmeettisessa summassa $21 + 24 + 27 + \ldots + 66$
on 16 yhteenlaskettavaa. Salissa on istuimia

$$16 \cdot \frac{21 + 66}{2} = 696.$$

Ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

Vastaus

696

ESIMERKKI 2

Laske luvulla 7 jaollisten kolminumeroisten luonnollisten lukujen summa.

Ratkaisu

Laskimella kokeilemalla huomataan, että pienin luvulla 7 jaollinen kolminumeroinen kokonaisluku on 105 ja suurin 994.

Kaikki kolminumeroiset luvulla 7 jaolliset luonnolliset luvut ovat peräkkäisiä jäseniä aritmeettisessa jonossa

$105,\ 112,\ 119,\ \ldots,\ 994.$

Lasketaan lukujen lukumäärä n.

$$105 + (n - 1) \cdot 7 = 994$$
$$105 + 7n - 7 = 994$$
$$7n = 896 \qquad | : 7$$
$$n = 128$$

Siis:

$$105 + 112 + 119 + \ldots + 994$$
$$= 128 \cdot \frac{105 + 994}{2}$$

Ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

$$= 70\,336.$$

Vastaus 70 336

ESIMERKKI 3

Asuntolaina, jonka suuruus on 180 000 euroa, maksetaan takaisin 15 vuoden aikana niin, että aina puolivuosittain maksetaan yhtä suuri lyhennys. Samalla maksetaan lainan korko edellisen puolen vuoden ajalta. Lainalle on sovittu kiinteä korko* 5,50 %. Kuinka paljon korkoa lainasta joudutaan kaikkiaan maksamaan?

Ratkaisu

Lainaa lyhennetään 15 vuoden ajan puolivuosittain, joten lyhennysten lukumäärä on $2 \cdot 15 = 30$. Jokaisen lyhennyksen suuruus on

$\frac{180\,000\ €}{30} = 6\,000\ €$, joten lainapääoma pienenee aina 6 000 eurolla:

180 000, 174 000, 168 000, … , 18 000, 12 000, 6 000.

Jokaisen lyhennyksen yhteydessä maksetaan korko päättyvän puolen vuoden lainapääomasta. Lainan korkoprosentti tarkoittaa aina vuotuista korkoa. Koska lainan korko on 5,50 %, niin korko puolelta vuodelta on

$\frac{5{,}50}{2}\ \% = 2{,}75\ \%$.

Ensimmäisen lyhennyksen yhteydessä maksetaan korkoa 2,75 % koko lainasta 180 000 (euroa):

$0{,}0275 \cdot 180\,000$.

Toisen lyhennyksen yhteydessä maksetaan korko lyhennetystä lainapääomasta:

$0{,}0275 \cdot 174\,000$.

Korot muodostavat jonon

$0{,}0275 \cdot 180\,000,\ 0{,}0275 \cdot 174\,000, \ldots,\ 0{,}0275 \cdot 6\,000$.

Jono on aritmeettinen, sillä koron suuruus pienenee aina määrällä $0{,}0275 \cdot 6\,000$.

---

* Asuntolainan korko ei aina ole kiinteä, vaan yleensä korko on sidottu vaihtuvaan viitekorkoon, euriborkorkoon tai pankin primekorkoon.

Maksettavan koron yhteismäärä on aritmeettinen summa

$$0{,}0275 \cdot 180\,000 + 0{,}0275 \cdot 174\,000 + \ldots + 0{,}0275 \cdot 6\,000.$$

Summassa on 30 yhteenlaskettavaa. Summan arvo on

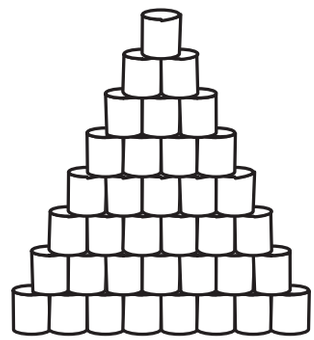
$$30 \cdot \frac{0{,}0275 \cdot 180\,000 + 0{,}0275 \cdot 6\,000}{2} = 76\,725.$$

Lainasta joudutaan maksamaan korkoa 76 725 euroa.

Vastaus 76 725 euroa

ESIMERKKI 4

Tuhannesta säilyketölkistä on koottava mahdollisimman korkea kuvion mukainen keko, jonka seuraavassa kerroksessa on aina yksi tölkki vähemmän kuin edellisessä ja ylimmässä kerroksessa on yksi tölkki. Montako tölkkiä pannaan alimpaan kerrokseen? Kuinka monta tölkkiä jää yli?



Ratkaisu Olkoon n tölkkien lukumäärä alimmassa kerroksessa. Tölkkien lukumäärä keossa on

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Lukumäärä on aritmeettinen summa, jossa on n yhteenlaskettavaa.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot \frac{1 + n}{2}$$

$$= \frac{n(1 + n)}{2}$$

Ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

Keossa on tölkkejä enintään 1 000. Ratkaistaan epäyhtälö:

$$\frac{n(1+n)}{2} \leqslant 1000 \qquad \big| \cdot 2 > 0$$

$$n(1+n) \leqslant 2000$$

$$n^2 + n - 2000 \leqslant 0.$$

On selvitettävä funktion $n^2 + n - 2000$ merkit.

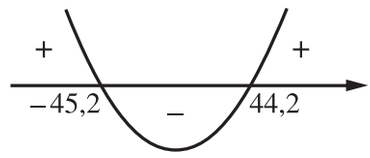
Ratkaistaan funktion $n^2 + n - 2000$ nollakohdat.

$$n^2 + n - 2000 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2000)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{8001}}{2}$$

$$n = \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2} \approx 44{,}2 \quad \text{tai} \quad n = \frac{-1 - \sqrt{8001}}{2} \approx -45{,}2$$

Funktion $n^2 + n - 2000$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Epäyhtälö $n^2 + n - 2000 \leqslant 0$ toteutuu likimääräisellä välillä $-45{,}2 \leqslant n \leqslant 44{,}2$.



Koska tölkkien lukumäärä n on positiivinen kokonaisluku, suurin mahdollinen tölkkien lukumäärä alimmassa kerroksessa on 44.

Rakennelmassa on tällöin $\frac{44 \cdot 45}{2} = 990$ tölkkiä, joten 10 tölkkiä jää yli.

Vastaus 44, yli jää 10 tölkkiä

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

288. Laske
a) 70 ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa $1 + \ldots + 70$
b) n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa $1 + \ldots + n$.

289. Laske aritmeettisen jonon 19, 31, 43, … neljäntoista ensimmäisen jäsenen summa.

290. Mitä summaa merkintä tarkoittaa? Laske summan arvo.

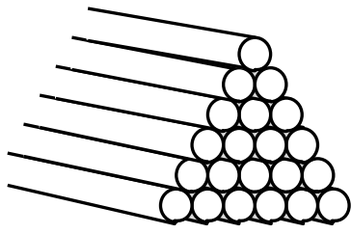
a) $\sum_{k=1}^{70} (2k - 1)$ b) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$

291. Kaupassa säilyketölkit on asetettu kekoon, jossa alimmassa kerroksessa on 170 tölkkiä, seuraavassa 162, seuraavassa taas kahdeksan tölkkiä vähemmän jne. Kuinka monta tölkkiä keossa on?

292. Mikä luvulla 7 jaollisten nelinumeroisten luonnollisten lukujen summa on?

293. Asuntolainan suuruus on 100 000 euroa. Laina maksetaan takaisin 10 vuoden aikana niin, että aina puolivuosittain maksetaan yhtä suuri lyhennys. Samalla maksetaan lainan korko edellisen puolen vuoden ajalta. Lainalle on sovittu kiinteä 5,20 %:n korko. Kuinka paljon rahaa kaikkiaan kuluu a) lainan korkoihin
b) lainan lyhennyksiin ja korkoihin?

294. 500 putkesta on tehtävä mahdollisimman korkea kuvion mukainen pino, jonka seuraavassa kerroksessa on aina yksi putki vähemmän kuin edellisessä ja ylimmässä kerroksessa yksi putki. Montako putkea pannaan alimpaan kerrokseen? Kuinka monta putkea jää yli?



295. WC-paperirullalla on 130 kierrosta paperia. Sisimmän kierroksen halkaisija on 4,5 cm ja uloimman 10,5 cm. Oleta, että rullalla oleva paperi muodostuu erillisistä paperirenkaista, ja laske arvio rullalla olevan paperin pituudelle.

296. Kuinka monta aritmeettisen jonon 2, 5, 8, … alkupään jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittää arvon 10 000?

297. Koulun liikuntasaliin järjestetään tuolit 12 riviin niin, että seuraavassa rivissä on aina neljä tuolia enemmän kuin edellisessä. Istumapaikkoja on oltava vähintään 500. Kuinka monta tuolia tulee ensimmäisessä rivissä olla?

298. Aritmeettisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kolmen ensimmäisen jäsenen summa on 96 ja kolmen seuraavan jäsenen summa 159. Määritä jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja jonon peräkkäisten jäsenten erotus d.

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

299. Laske peräkkäisten luvulla 3 jaollisten kokonaislukujen summa
$-900 + (-897) + \ldots + 87 + 90$.

300. Penger on tuettu 65:lla pystytuella, jotka pitenevät tasaisesti niin, että ensimmäisen tuen pituus on 1,10 metriä ja viimeisen 5,40 metriä. Kuinka monta metriä parrua pystytukiin tarvitaan?

301. Aritmeettisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = 17$ ja $a_2 = 25$. Laske

a) $\sum_{n=1}^{19} a_n$ b) $\sum_{n=15}^{50} a_n$.

302. Olkoon $a_1 = 3$ ja $a_n = 3a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$. Laske jonon (a_n) peräkkäisten jäsenten tulon $a_{10} \cdot a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{30}$ tarkka arvo.

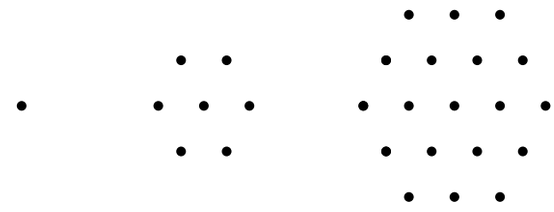
303. Kesämökin hankintaa varten otettu 45 000 euron laina maksetaan takaisin viiden vuoden aikana niin, että kuukauden välein maksetaan yhtä suuri lyhennys. Samalla maksetaan edellisen kuukauden korko. Lainalla on kiinteä korko 6,00 %. Kuinka paljon korkoa lainasta joudutaan kaikkiaan maksamaan?

304. Kuinka monen ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa voidaan laskea matkapuhelimen laskimella, jossa on kymmenen numeron näyttö, muttei lukujen esitystä kymmenpotenssimuodossa?

305. N. päättää säästää tammikuussa sukanvarteen tietyn rahamäärän ja sen jälkeen joka kuukausi 20 euroa enemmän kuin edellisenä kuukautena. Millä rahamäärällä hänen tulee aloittaa, jotta vuoden päättyessä sukanvarressa olisi 2 000 euroa? Anna vastaus kokonaisina euroina.

306. Aritmeettisessa jonossa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on $\sum_{n=1}^{10} a_n = 1\,000$ ja $\sum_{n=11}^{30} a_n = 3\,800$. Määritä jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja jonon peräkkäisten jäsenten erotus d.

307. Kuviossa on kolme ensimmäistä ns. kuusikulmiolukua 1, 7 ja 19. Mikä on
a) neljäs b) 30. c) n. kuusikulmioluku?



308. Olkoon $P(n) = 4n^2 + 5n$. Määritä aritmeettinen jono, jonka n:n ensimmäisen jäsenen summa on $P(n)$ kaikilla n.

309. Osoita, että jokaisen aritmeettisen jonon n:n ensimmäisen jäsenen summan lauseke on muotoa $an^2 + bn$. Osoita edelleen, että jokainen lauseke, joka on muotoa $an^2 + bn$, ilmaisee jonkin aritmeettisen jonon n:n ensimmäisen jäsenen summan.

310. Jonossa (a_n), joka alkaa 1, 2, 4, 7, … , peräkkäisten jäsenten erotus suurenee koko ajan yhdellä. Määritä jonon lauseke $a_n = f(n)$.
Mikä jonon sadas jäsen on?

311. Olkoon $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ ja
$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 5$, kun $n \geqslant 3$.
Määritä jonon (u_n) lauseke $u_n = f(n)$.
Mikä jonon (u_n) 40. jäsen on?

312. Laske välin]0, 1[kaikkien niiden rationaalilukujen summa, joiden supistetun murtolukumuodon nimittäjä on a) alkuluku 613
b) luvun 5 neljäs potenssi 625 c) 1 000.

313. Laske kaikkien osamäärien $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja ja $0 < m < n < 100$, summa.

Geometrinen summa

Ongelma

Huomaa laskinnäppäilyjä säästävä tapa laskea geometrisen jonon $1,\ 5,\ 5^2,\ 5^3, \ldots$ seitsemän ensimmäisen jäsenen summa. Suorita lasku loppuun.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 \\ -5S &= \quad -5 - 5^2 - 5^3 - 5^4 - 5^5 - 5^6 - 5^7 \quad \text{Lasketaan yhteen.} \\ \hline -4S &= \end{aligned}$$

Geometrinen summa

Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan *geometriseksi summaksi*.

Päätellään kaava, jolla voidaan laskea geometrisen jonon

$a,\ aq,\ aq^2, \ldots$

n:n ensimmäisen jäsenen summa

$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$.

Kerrotaan summa S_n peräkkäisten jäsenten suhdeluvulla q. Ryhmitellään summat S_n ja qS_n allekkain.

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + aq^2 + \ \ldots\ + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ qS_n &= \quad aq + aq^2 + \ \ldots\ + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n \end{aligned}$$

Kerrotaan summa qS_n luvulla -1 ja lasketaan summat yhteen.

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + aq^2 + \ \ldots\ + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ -qS_n &= \quad -aq - aq^2 - \ \ldots\ - aq^{n-2} - aq^{n-1} - aq^n \\ \hline S_n - qS_n &= a + 0 \ + 0 \ + \ \ldots\ + 0 \quad + 0 \quad - aq^n \end{aligned}$$

Yhteenlaskettaessa kumoutuvat kaikki muut termit paitsi summan S_n ensimmäinen termi a ja summan $-qS_n$ viimeinen termi $-aq^n$.

$$S_n - qS_n = a - aq^n$$

$$(1-q)S_n = a(1-q^n) \qquad \big| : (1-q) \quad \text{Oletetaan, että } q \neq 1.$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

Saatiin kaava geometrisen jonon $a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots$ n:n ensimmäisen jäsenen summalle. Kaava pätee, kun $q \neq 1$. Jos $q = 1$, jono on vakiojono $a,\ a,\ a,\ \ldots$, ja jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on na.

Geometrisen summan kaava

Kun lasketaan yhteen geometrisen jonon

$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots$

n ensimmäistä jäsentä, niin summan arvo on

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Kaavassa

a on summan ensimmäinen jäsen,
q on jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku,
n on yhteenlaskettujen jäsenten lukumäärä.

Kaava pätee, kun $q \neq 1$. Jos $q = 1$, niin jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on na.

ESIMERKKI 1

Laske geometrisen summan arvo.

a) $5 + 5 \cdot 3 + \ldots + 5 \cdot 3^{15}$ b) $\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \ldots - \frac{1}{3^9}$

Ratkaisu

a) Geometrisen summan $5 + 5 \cdot 3 + \ldots + 5 \cdot 3^{15}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on luku 5, peräkkäisten jäsenten suhdeluku on 3, ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 16.

Siis

$5 + 5 \cdot 3 + \ldots + 5 \cdot 3^{15}$ Kaavaan $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan $a = 5$, $q = 3$ ja $n = 16$.

$= \frac{5(1-3^{16})}{1-3}$

$= \frac{5(1-3^{16})}{-2}$ $b - a = -(a - b)$

$= \frac{5(3^{16}-1)}{2} = 107\,616\,800.$

b) Geometrisen summan $\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \ldots - \frac{1}{3^9}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on luku $\frac{1}{3^2}$. Jonon seuraava jäsen saadaan aina edeltävästä kertomalla luvulla $-\frac{1}{3}$, joten jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku on $-\frac{1}{3}$. Yhteenlaskettavien lukumäärä on 8.

Siis

$$\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \ldots - \frac{1}{3^9}$$

Kaavaan $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan $a = \frac{1}{3^2}$, $q = -\frac{1}{3}$ ja $n = 8$.

$$= \frac{\frac{1}{3^2}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^8\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{3^8}\right)}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{3^8}\right) : \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3^8 - 1}{3^8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^8 - 1}{4 \cdot 3^9} = \frac{6\,560}{78\,732}$$

$$= \frac{1\,640}{19\,683}.$$

Vastaus a) 107 616 800 b) $\frac{1\,640}{19\,683}$

ESIMERKKI 2

Kuinka monta geometrisen jonon $2,\ 1{,}3 \cdot 2,\ 1{,}3^2 \cdot 2, \ldots$ ensimmäistä jäsentä on laskettava yhteen, jotta summan arvo ylittäisi $1\,000$?

Ratkaisu

Geometrisen jonon $2,\ 1{,}3 \cdot 2,\ 1{,}3^2 \cdot 2, \ldots$ n:n ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = \frac{2(1 - 1{,}3^n)}{1 - 1{,}3}$$

Kaavaan $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan $a = 2$ ja $q = 1{,}3$.

$$= \frac{2(1 - 1{,}3^n)}{-0{,}3} = \frac{2(1{,}3^n - 1)}{0{,}3}.$$

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\frac{2(1{,}3^n - 1)}{0{,}3} > 1000 \qquad \big| \cdot 0{,}3$$

$$2(1{,}3^n - 1) > 300 \qquad \big| : 2$$

$$1{,}3^n - 1 > 150$$

$$1{,}3^n > 151$$

$$\lg 1{,}3^n > \lg 151$$

Funktio lg on aidosti kasvava, joten järjestys säilyy.

$$n \lg 1{,}3 > \lg 151 \qquad \big| : \lg 1{,}3 \ (\approx 0{,}11 > 0)$$

$$n > \frac{\lg 151}{\lg 1{,}3} \approx 19{,}1$$

On laskettava yhteen vähintään 20 ensimmäistä jonon jäsentä.

Vastaus

vähintään 20

ESIMERKKI 3

Päivänä, jona Leena syntyi, ja jokaisena Leenan syntymäpäivänä aina 15-vuotispäivään saakka, kummitäti talletti Leenan tilille saman rahamäärän. Tilin korko lähdeveron* vähentämisen jälkeen on 5 %.

a) Jos vuotuisen talletuksen suuruus oli 200 euroa, niin kuinka paljon Leena voi nostaa tililtä, kun hän täyttää 18 vuotta?

b) Kuinka suuri vuotuinen talletus olisi riittänyt, jotta Leena olisi voinut 18-vuotispäivänään nostaa 3 000 euroa?

Ratkaisu

Merkitään vuotuisen talletuksen suuruutta t. Hahmottamisen yksinkertaistamiseksi ajatellaan, että kummitäti perustaa joka vuosi uuden pankkitilin ja tallettaa sille t euroa. Koska tilien korko on 5 %, jokaisella tilillä oleva pääoma tulee joka vuosi 1,05-kertaiseksi.

Leenan ikä

	0	1	2	…	14	15	…	18
1. tili	t	$1{,}05t$	$1{,}05^2t$	…	$1{,}05^{14}t$	$1{,}05^{15}t$	…	$1{,}05^{18}t$
2. tili		t	$1{,}05t$	…	$1{,}05^{13}t$	$1{,}05^{14}t$	…	$1{,}05^{17}t$
3. tili			t	…	$1{,}05^{12}t$	$1{,}05^{13}t$		$1{,}05^{16}t$
…								
15. tili					t	$1{,}05t$	…	$1{,}05^4t$
16. tili						t	…	$1{,}05^3t$

Leenan syntyessä tehty talletus on 18-vuotissyntymäpäivänä tullut $1{,}05^{18}$-kertaiseksi, seuraava talletus $1{,}05^{17}$-kertaiseksi jne. Viimeinen, 15-vuotispäivänä tehty talletus on tullut $1{,}05^3$-kertaiseksi.

18-vuotispäivänä nostettavissa oleva rahasumma on

$$1{,}05^3t + 1{,}05^4t + \ldots + 1{,}05^{18}t.$$

Kyseessä on geometrinen summa, jonka ensimmäinen jäsen on $1{,}05^3t$, jonka peräkkäisten termien suhdeluku on 1,05 ja jossa on 16 yhteenlaskettavaa.

---

* Talletuksen korkotuloista maksetaan valtiolle lähdeveroa. Vuonna 2006 lähdevero oli 28 % koron määrästä.

Siis

$1{,}05^3t + 1{,}05^4t + \ldots + 1{,}05^{18}t$ Kaavaan $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan $a = 1{,}05^3t$, $q = 1{,}05$ ja $n = 16$.

$$= \frac{1{,}05^3t(1-1{,}05^{16})}{1-1{,}05}.$$

a) Jos vuotuisen talletuksen suuruus t on 200 euroa, niin Leenan nostettavissa oleva rahamäärä on

$$\frac{1{,}05^3 \cdot 200 \cdot (1-1{,}05^{16})}{1-1{,}05} \approx 5\,477{,}30 \text{ euroa.}$$

b) Ratkaistaan, kuinka suuri vuotuisen talletuksen t tulee olla, jotta tilille kertyisi 3 000 euroa.

$$\frac{1{,}05^3t(1-1{,}05^{16})}{1-1{,}05} = 3\,000$$

$$\frac{1{,}05^3t(1-1{,}05^{16})}{-0{,}05} = 3\,000 \qquad \big| \cdot (-0{,}05)$$

$$1{,}05^3t(1-1{,}05^{16}) = -150 \qquad \big| : 1{,}05^3(1-1{,}05^{16})$$

$$t = \frac{-150}{1{,}05^3(1-1{,}05^{16})} \approx 109{,}54$$

3 000 euroa kertyy, jos vuotuisen talletuksen suuruus on 109,54 euroa.

Vastaus a) 5 477,30 euroa b) 109,54 euroa

Seuraava esimerkki 4 näyttää menetelmän, jolla voidaan muodostaa lauseke jokaiselle lukujonolle, jonka rekursiokaava on muotoa

$a_n = qa_{n-1} + b.$

Esimerkin 4 jonoa on tutkittu luvun Rekursiivinen jono esimerkissä 3, jossa jonon jäseniä laskettiin laskimen [Ans] -näppäimen avulla.

ESIMERKKI 4

Hakkuusuunnitelman alkaessa puumäärä metsäpalstalla on ensimmäisen vuoden alussa $1\,700\ \text{m}^3$. Puumäärä lisääntyy joka kasvukausi $4\ \%$, ja kasvukauden jälkeen syksyllä puustoa hakataan $50\ \text{m}^3$.
a) Olkoon a_n puumäärä n. vuoden alussa. Määritä jonon (a_n) lauseke $a_n = f(n)$.
b) Kuinka monennen vuoden alussa puumäärä ensimmäisen kerran ylittää $2\,500\ \text{m}^3$?

Ratkaisu

a) Jonon (a_n) rekursiivinen kuvailu on

$a_1 = 1700$ ja $a_n = 1{,}04a_{n-1} - 50$, kun $n \geqslant 2$.

Jono (a_n) on siis muotoa

$a_1 = a$ ja $a_n = qa_{n-1} + b$, kun $n \geqslant 2$,

missä $a = 1700$, $q = 1{,}04$ ja $b = -50$.

Päätellään jonolle lauseke laskemalla jonon ensimmäisiä jäseniä.

$a_1 = a$

$a_2 = qa_1 + b = qa + b$

$a_3 = qa_2 + b = q(qa + b) + b = q^2a + qb + b$

$a_4 = qa_3 + b = q(q^2a + qb + b) + b = q^3a + q^2b + qb + b$

Havaitaan, että

$a_n = q^{n-1}a + q^{n-2}b + q^{n-3}b + \ldots + qb + b.$

Lausekkeessa esiintyvä summa $q^{n-2}b + q^{n-3}b + \ldots + qb + b$ on geometrinen summa, jonka (lopusta alkuun tulkittuna) ensimmäinen jäsen on b, jäsenten suhdeluku on q, ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n - 1$. Saadaan

$$a_n = q^{n-1}a + \frac{b(1 - q^{n-1})}{1 - q}.$$

Sijoitetaan $a = 1700$, $q = 1{,}04$ ja $b = -50$.

$$\begin{aligned} a_n &= 1{,}04^{n-1} \cdot 1700 + \frac{-50(1 - 1{,}04^{n-1})}{1 - 1{,}04} \\ &= 1{,}04^{n-1} \cdot 1700 + 1250(1 - 1{,}04^{n-1}) \\ &= 1{,}04^{n-1} \cdot 1700 + 1250 - 1250 \cdot 1{,}04^{n-1} \\ &= 1{,}04^{n-1} \cdot 450 + 1250 \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan epäyhtälö.

$$1{,}04^{n-1} \cdot 450 + 1250 > 2500$$

$$1{,}04^{n-1} \cdot 450 > 1250 \qquad \big| : 450$$

$$1{,}04^{n-1} > \frac{1250}{450}$$

$$\ln 1{,}04^{n-1} > \ln \frac{1250}{450}$$

Funktio ln on aidosti kasvava, joten järjestys säilyy.

$$(n - 1) \ln 1{,}04 > \ln \frac{1250}{450} \qquad \big| : \ln 1{,}04 \ (\approx 0{,}039 > 0)$$

$$n - 1 > \frac{\ln \frac{1250}{450}}{\ln 1{,}04}$$

$$n > \frac{\ln \frac{1250}{450}}{\ln 1{,}04} + 1 \approx 27{,}05$$

Puumäärä ylittää 2 500 m^3 ensimmäisen kerran 28. vuoden alussa.

Vastaus a) $a_n = 1{,}04^{n-1} \cdot 450 + 1250$ b) 28. vuoden alussa

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

314. Laske geometrisen summan arvo.

a) $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \ldots + 2 \cdot 5^9$

b) $1 - 5 + 5^2 - \ldots + 5^8 - 5^9$

c) $5^2 + 5^4 + \ldots + 5^{10}$

315. Laske geometrisen summan arvo.

a) $\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^8$

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^8}$

316. Laske.

a) $\sum_{k=0}^{40} 2^k$ b) $\sum_{k=11}^{40} 2^k$

317. Kuinka paljon aikaa kuluu kilometrin kuntouintiin, jos ensimmäinen 25 metrin altaanpituus uidaan 20 sekunnissa ja sen jälkeen jokaiseen seuraavaan kuluu 10 % enemmän aikaa kuin edelliseen? Anna vastaus minuutin tarkkuudella.

318. Yrityksessä on tapana, että uuden työntekijän palkka nousee ensimmäisinä vuosina 5 % vuodessa. Työnhakija haluaa ansaita yhteensä 100 000 euroa viiden ensimmäisen vuoden aikana. Mikä hänen palkkatoivomuksensa on ensimmäiselle vuodelle? Anna vastaus satojen eurojen tarkkuudella.

319. Kuinka monta ensimmäistä geometrisen jonon $1,\ 0{,}99,\ 0{,}99^2, \ldots$ jäsentä vähintään on laskettava yhteen, jotta summa ylittää luvun 99?

320. Arvioidaan, että maapallon tunnetut öljyvarat riittävät nykykulutuksella vielä 40 vuotta. Kuinka pitkään tunnetut öljyvarat riittäisivät, jos öljyn kulutusta pystyttäisiin joka vuosi vähentämään 1,5 %?

321. Päivänä, jona Kalle syntyi, ja jokaisena syntymäpäivänä aina 18-vuotispäivään saakka, isoäiti talletti Kallen tilille saman rahamäärän. Tilin korko on 5 %.

a) Jos vuotuisen talletuksen suuruus oli 500 euroa, niin kuinka paljon Kalle voi nostaa tililtä täyttäessään 21 vuotta? Koron lähdeveroa ei oteta huomioon.

b) Kuinka suuri vuotuinen talletus olisi tarvittu, jotta Kalle olisi voinut 21-vuotispäivänään nostaa tililtä yksiön hinnan 60 000 euroa?

322. Säästäminen maailmanympärysmatkaa varten aloitettiin vuoden 2001 alussa. Jokaisen vuoden alussa talletetaan 200 euroa tilille, jonka korko on 5 %. Minkä vuoden alussa talletusta ei enää tarvitse tehdä, ts. tilillä on edellisen vuoden korkojen lisäämisen jälkeen tavoiteltu säästösumma 5 000 euroa? Koron lähdeveroa ei oteta huomioon.

323. Geometrisen jonon $a,\ aq,\ aq^2, \ldots$ kolmen ensimmäisen jäsenen summa on 2 ja kolmen seuraavan jäsenen summa 54. Määritä jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku q ja jonon ensimmäinen jäsen a.

324. Ilmaise jono
$a_1 = 5$ ja $a_n = 3a_{n-1} + 2$, kun $n \geqslant 2$,
lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.

325. Eläinpopulaation suuruus kasvaa joka vuosi luontaisesti 8 %, minkä lisäksi kantaan muuttaa joka vuoden lopussa 40 uutta jäsentä. Ensimmäisen seurantavuoden alussa populaation suuruus oli 2 000 jäsentä.
a) Kuvaile rekursiivisesti ja lausekkeen avulla jono (a_n), jonka jäsen a_n ilmaisee populaation suuruuden n. vuoden alussa.
b) Kuinka monennen vuoden alussa populaatio ensimmäisen kerran on suurempi kuin 5 000?

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

326. Laske geometrisen jonon $4,\ -12,\ 36,\ \ldots$ kolmenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

327. Vanhan tarinan mukaan sakkipelin keksijä pyysi palkkioksi yhden jyvän sakkilaudan ensimmäiselle ruudulle, kaksi jyvää toiselle, neljä kolmannelle ja niin edelleen 64. ruutuun saakka: seuraavalle ruudulle aina kaksi kertaa niin monta kuin edelliselle. Kuinka monta jyvää tulee koko sakkilaudalle?

328. Laske.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} 3^{2k}$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{2^{3i}}$

329. Teollisuuskiinteistön vuokraksi sovittiin 40 000 euroa ensimmäiseltä vuodelta. Samalla sovittiin, että kymmenen vuoden aikana kiinteistön vuokra nousee 12 % joka vuosi.
a) Kuinka suuri vuokra on kymmenentenä vuonna?
b) Kuinka paljon vuokraa joudutaan maksamaan kymmenen ensimmäisen vuoden aikana? Anna vastaus euron tarkkuudella.

330. Missä ajassa on juostava ensimmäinen ratakierros (400 m), jos tavoitteena on juosta 10 000 metriä 40 minuutissa tasaisesti vauhtia kiristäen niin, että jokainen kierros juostaan 3 % lyhyemmässä ajassa kuin edellinen?

331. Henkilö N. käynnistää ketjukirjeen lähettämällä sen kalenteriviikolla 1 viidelle henkilölle, joista jokainen lähettää sen seuraavalla viikolla viidelle henkilölle jne. Millä viikolla ketjukirje on voinut tavoittaa jokaisen maapallon 6,6 miljardista ihmisestä?

332. Turpeen määrän turvevoimalan hankinta-alueella lasketaan riittävän nykykäytöllä 30 vuotta. Kuinka monen vuoden ajan turve riittää, jos
a) voimalan turpeen tarve kasvaa joka vuosi 3 %
b) voimalan teknistä prosessia kehittämällä turpeen tarve saadaan joka vuosi pienenemään 1,5 %?

333. Tilille, jonka korko oli 4 %, oli talletettu 20 vuoden ajan joka vuoden alussa 1 000 euroa. Paljonko tilillä oli rahaa, kun tili lopetettiin 20. vuoden lopussa? Koron lähdeveroa ei oteta huomioon.

334. Roope on sijoittanut vuoden 2000 alusta alkaen joka vuoden alussa 10 000 euroa kohteeseen, joka tuottaa 6 %:n vuotuisen koron. Hän lopettaa sijoittamisen heti, kun pääoma edellisen vuoden korkojen lisäämisen jälkeen on niin suuri, että sen vuotuinen korkotuotto ylittää 15 000 euroa. Minkä vuoden alussa hän lopettaa sijoittamisen?

335. Geometrisessa jonossa (a_n) on

$$\sum_{n=1}^{4} a_n = 5 \text{ ja } \sum_{n=3}^{6} a_n = 20.$$

Määritä jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku q ja jonon ensimmäinen jäsen a_1.

336. Epäsuotuisissa oloissa elävän eliöpopulaation suuruus ensimmäisen vuoden alussa oli 2 000. Populaatio pienenee joka vuosi 20 %, mutta kantaan muuttaa joka vuoden lopussa 50 uutta jäsentä.
a) Kuvaile rekursiivisesti ja lausekkeen avulla jono (a_n), jonka jäsen a_n ilmaisee populaation suuruuden n. vuoden alussa. Mikä populaation suuruus on kymmenennen vuoden alussa?
b) Kuinka monennen vuoden alussa kannan suuruus ensimmäisen kerran alittaa 300 yksilön rajan?

337. Kun Einari siirtyi vuoden alussa eläkkeelle, hänellä oli pankissa a euroa sijoitettuna tilille, jonka vuotuinen korko on 5,00 %. Toisesta eläkevuodesta alkaen hän nostaa joka vuoden alussa tililtä h euroa.
a) Olkoon a_n tilillä oleva rahamäärä n. eläkevuoden alussa edellisen vuoden korkojen ja vuotuisen noston jälkeen. Kuvaile jono (a_n) rekursiivisesti ja määritä jonon lauseke $a_n = f(n)$. Koron lähdeveroa ei oteta huomioon.
b) Oletetaan, että alkutalletus a on 100 000 euroa ja vuotuinen nosto h on 10 000 euroa. Paljonko tilillä on rahaa kymmenennen eläkevuoden alussa? Kuinka monentena vuonna tili tyhjenee?
c) Oletetaan, että alkutalletus a on 100 000 euroa. Einari ennakoi eläkevuosiensa määräksi 25. Mikä tulee vuotuisen noston h suuruuden olla, jotta rahat juuri riittäisivät?
d) Kuinka suuri alkutalletuksen tulee olla, jotta Einari eläkevuosiensa ajan (25 vuotta) voisi aina nostaa 10 000 euroa vuodessa?

338. Asuntolainan suuruus on 150 000 euroa, ja lainalle on sovittu kiinteä 8,00 %:n korko. Laina maksetaan takaisin niin sanotulla *tasaerä-* eli *annuiteettiperiaatteella*: Sovitun pituisten yhtä pitkien ajanjaksojen jälkeen pankille maksetaan aina yhtä suuri summa, *tasaerä* eli *annuiteetti*. Tästä tasaerästä pankki perii edellisen maksun jälkeen kertyneen koron ja jäljelle jääneellä osalla lyhennetään lainaa.
a) Oletetaan, että tasaerä maksetaan vuoden välein, ja olkoon tasaerän suuruus s. Olkoon a_n lainan suuruus n. vuoden alussa annuiteetin maksamisen jälkeen ($a_1 = 150\,000$). Kuvaile jono (a_n) rekursiivisesti ja määritä jonon lauseke muodossa $a_n = f(n)$.
b) Mikä tasaerän suuruus on, jos lainan takaisinmaksuaika on 20 vuotta?
c) Kuinka paljon rahaa kaikkiaan kuluu lainan takaisinmaksuun, jos takaisinmaksuaika on 20 vuotta?

339. Jonossa (a_n), joka alkaa 1, 2, 5, 14, … , peräkkäisten jäsenten erotukset muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonon lauseke $a_n = f(n)$. Mikä jonon 15. jäsen on?

340. Ilmaise jono
$a_1 = 1$, $a_2 = 5$ ja
$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$, kun $n \geqslant 3$,
lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.
Mikä jonon 15. jäsen on?

341. Jonon (u_n) ensimmäinen jäsen on luku a, toinen jäsen luku b ja kolmannesta jäsenestä alkaen jonon jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen keskiarvo.
a) Ilmaise jono (u_n) lausekkeen avulla muodossa $u_n = f(n)$. Laske viiden desimaalin tarkkuudella jonon 20. jäsen, kun $a = 1$ ja $b = 4$.
b) Mitä lukua jonon (u_n) jäsenet lähenevät n:n suuretessa?

342. Matti lähtee portaiden juuresta, heittää kahta rahaa ja nousee kaksi askelmaa aina, kun tulee kaksi klaavaa, ja muutoin yhden askelman. Olkoon p_n todennäköisyys, että Matti käy n:nnellä askelmalla.

a) Kuvaile jono (p_n) rekursiivisesti.

b) Ilmaise jono (p_n) lausekkeen avulla muodossa $p_n = f(n)$. Laske jonon jäsenet p_7 ja p_8.

c) Mitä lukua jonon (p_n) jäsenet lähenevät n:n suuretessa?

Äärettömät joukot ja numeroituvat joukot

Määritelmä

Kahdessa joukossa A ja B on *yhtä monta* alkiota, jos joukkojen alkiot voidaan asettaa pareittain vastaamaan toisiaan.

Esimerkki 1

Osoita, että viikonpäiviä on yhtä monta kuin Jukolan perheen poikia.

Ratkaisu

Tapa 1. Joukkojen {maanantai, tiistai, keskiviikko, torstai, perjantai, lauantai, sunnuntai} ja {Juhani, Tuomas, Aapo, Simeoni, Timo, Lauri, Eero} alkiot voidaan asettaa pareittain vastaamaan toisiaan.

maanantai $\leftrightarrow$ Juhani
tiistai $\leftrightarrow$ Tuomas
keskiviikko $\leftrightarrow$ Aapo
torstai $\leftrightarrow$ Simeoni
perjantai $\leftrightarrow$ Timo
lauantai $\leftrightarrow$ Lauri
sunnuntai $\leftrightarrow$ Eero

Tapa 2. Verrataan molempia joukkoja johonkin joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$ eli *lasketaan* joukkojen alkiot.

$1 \leftrightarrow$ maanantai	$1 \leftrightarrow$ Juhani
$2 \leftrightarrow$ tiistai	$2 \leftrightarrow$ Tuomas
$3 \leftrightarrow$ keskiviikko	$3 \leftrightarrow$ Aapo
$4 \leftrightarrow$ torstai	$4 \leftrightarrow$ Simeoni
$5 \leftrightarrow$ perjantai	$5 \leftrightarrow$ Timo
$6 \leftrightarrow$ lauantai	$6 \leftrightarrow$ Lauri
$7 \leftrightarrow$ sunnuntai	$7 \leftrightarrow$ Eero

Molemmissa joukoissa on yhtä monta alkiota kuin joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Niissä on siis yhtä monta alkiota. Tapana on myös sanoa, että molemmissa joukoissa on seitsemän alkiota.

Esimerkki 2

Osoita, että luvulla 5 jaollisia positiivisia kokonaislukuja on yhtä monta kuin positiivisia kokonaislukuja.

Ratkaisu

Määritellään pareittainen vastaavuus positiivisten kokonaislukujen ja luvulla 5 jaollisten positiivisten kokonaislukujen välille.

$1 \leftrightarrow 5$
$2 \leftrightarrow 10$
$3 \leftrightarrow 15$
$\cdots$

Vastaavuus voidaan ilmaista myös funktion avulla: vasemmalta oikealle $f(n) = 5n$ tai oikealta vasemmalle $g(n) = \frac{n}{5}$. □

343. Osoita, että Aku Ankan veljenpoikia on yhtä monta kuin Suomen eduskunnan puhemiehistön jäseniä.

344. Osoita, että luvulla 13 jaollisia positiivisia kokonaislukuja on yhtä monta kuin positiivisia kokonaislukuja.

345. Osoita, että a) parillisia b) parittomia positiivisia kokonaislukuja on yhtä monta kuin positiivisia kokonaislukuja.

346. Osoita, että välillä $]0, 2[$ on yhtä monta reaalilukua kuin välillä $]0, 1[$. (Ohje: Keksi jokin funktio, jonka välillä $]0, 1[$ saamien arvojen joukko on väli $]0, 2[$ ja joka saa välillä $]0, 1[$ jokaisen arvonsa tasan yhdessä kohdassa.)

347. Osoita, että jokaisella välillä $]a, b[$ (missä $a < b$) on yhtä monta reaalilukua kuin välillä $]0, 1[$.

348. Osoita, että välillä $]0, 1[$ on yhtä monta lukua kuin koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. (Ohje: Edellisen tehtävän mukaan riittää, että löydetään jollakin välillä $]a, b[$ määritelty funktio, jonka tällä välillä saamien arvojen joukko on koko reaalilukujen joukko ja joka tällä välillä saa jokaisen arvonsa tasan yhdessä kohdassa.)

Edellä nähtiin, että esimerkiksi positiivisten kokonaislukujen joukolla ja reaalilukujen joukolla $\mathbb{R}$ on yllättävän tuntuinen ominaisuus: joukolla on aito osajoukko*, jossa on yhtä monta alkiota kuin koko joukossa.

Määritelmä

Joukko on *ääretön*, jos sillä on aito osajoukko, jossa on yhtä monta alkiota kuin koko joukossa.

Esimerkin 2 nojalla positiivisten kokonaislukujen joukko on ääretön. Tehtävän 348 nojalla reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on ääretön.

Monet matemaatikot pitivät vielä 1700-luvulla määritelmässä kuvattua äärettömien joukkojen ominaisuutta osoituksena äärettömien joukkojen mahdottomuudesta, sillä ”onhan osa aina pienempi kuin kokonainen”.

Edelleen määritellään: joukko on *äärellinen*, jos se ei ole ääretön. Voidaan todistaa, että joukko on äärellinen, jos ja vain jos se on joko tyhjä joukko (joukko, jossa ei ole yhtään alkiota) tai siinä on yhtä monta alkiota kuin jossain joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$, missä n on positiivinen kokonaisluku. Toisin sanoen: joukko on äärellinen, jos ja vain jos siinä on n alkiota, missä n on jokin luonnollinen luku.

---

* Jokainen joukko A on itsensä osajoukko. Muut joukon A osajoukot ovat *aitoja osajoukkoja*. Aito osajoukko ei siis sisällä kaikkia joukon A alkioita.

Tärkeitä erikoistapauksia äärettömistä joukoista ovat ns. numeroituvat joukot.

Joukko on *numeroituva*, jos siinä on yhtä monta alkiota kuin positiivisten kokonaislukujen joukossa $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Numeroituvan joukon alkiot voidaan numeroida $a_1, a_2, \ldots$, eli sen alkioista voidaan muodostaa lukujono.

Esimerkin 2 nojalla luvulla 5 jaollisten positiivisten kokonaislukujen joukko on numeroitava. Tehtävässä 345 osoitettiin, että sekä parillisten että parittomien positiivisten kokonaislukujen joukot ovat numeroituvia.

Numeroituvia ovat myös monet joukot, joissa ensi silmäyksellä näyttää olevan enemmän lukuja kuin positiivisten kokonaislukujen joukossa.

Esimerkki 3

Osoita, että kaikkien kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ on numeroituva.

Ratkaisu

Aloitetaan nollasta ja luetellaan positiivisia ja negatiivisia lukuja vuorotellen

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. □

349. Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ edellisen esimerkin lukujono. Määritä a_{11} ja a_{2000}. Kuinka mones jonon jäsen luku 2000 on?

Myös positiivisia rationaalilukuja on yhtä monta kuin positiivisia kokonaislukuja.

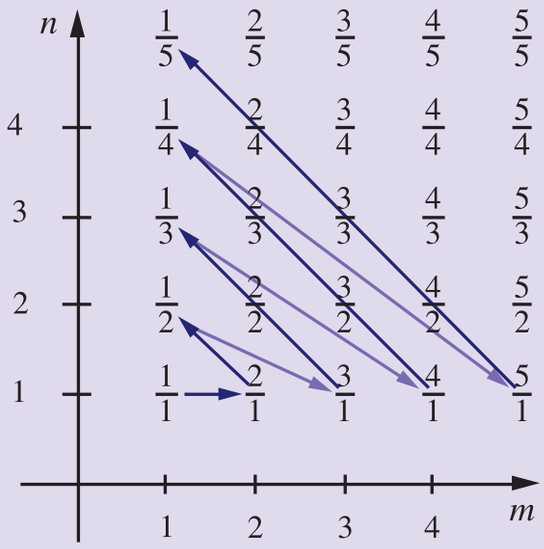
Esimerkki 4

Osoita, että positiivisten rationaalilukujen joukko on numeroituva.

Ratkaisu

Kuvaillaan lukujono $a_1,\ a_2,\ \ldots$, jossa esiintyvät kaikki positiiviset rationaaliluvut. Yksinkertaisuuden vuoksi jonossa sallitaan saman rationaaliluvun toistuminen. Jonosta voi poistaa toistot hyppäämällä jo aikaisemmin lueteltujen lukujen yli.

Positiiviset rationaaliluvut ovat positiivisten kokonaislukujen osamääriä. Merkitään osamäärä $\frac{m}{n}$ koordinaatistoon pisteen (m, n) kohdalle.



Kulkemalla nuolten mukaisesti voidaan muodostaa kaikkien positiivisten rationaalilukujen kautta kulkeva lukujono, joka alkaa

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ .\ \square$$

350. Osoita, että kaikkien rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva.

Kaikki äärettömät joukot eivät kuitenkaan ole numeroituvia:

Esimerkki 5

Osoita, että väli $]0, 1[$ ei ole numeroituva.

Ratkaisu

Osoitetaan, että mikään välin $]0, 1[$ luvuista muodostettu jono ei sisällä kaikkia välin $]0, 1[$ lukuja. Seuraavassa suoritettava päättely on kuuluisa *Cantorin lävistäjäpäättely*.*

Olkoon $a_1,\ a_2,\ \ldots$ jokin jono välin $]0, 1[$ lukuja.

Jokainen reaaliluku voidaan ilmaista desimaalimuodossa. Jatketaan päättyviä desimaalilukuja tarvittaessa nollilla ja kirjoitetaan jonon $a_1,\ a_2,\ \ldots$ luvut taulukkoon desimaalit kohdakkain.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \ldots\\
a_2 &= 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \ldots\\
a_3 &= 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ \ldots\\
a_4 &= 0,\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ \ldots\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Taulukossa a_{11} on luvun a_1 ensimmäinen desimaali, a_{12} luvun a_1 toinen desimaali jne. Vastaavasti esimerkiksi a_{41} on luvun a_4 ensimmäinen desimaali, a_{42} luvun a_4 toinen desimaali jne.

* Georg Cantor (1845–1918), saksalainen matemaatikko

Muodostetaan luku b taulukon lävistäjällä olevista desimaaleista:

$a_1 = 0, a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ ...$
$a_2 = 0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ ...$
$a_3 = 0, a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ ...$
$a_4 = 0, a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ ...$
$...$

Siis

$b = 0, a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}\ ...\ .$

Muutetaan luvun b jokaista desimaalia. Näin saadaan luku

$c = 0, c_1\ c_2\ c_3\ ...\ ,$

jolle pätee

$c_1 \neq a_{11},\ c_2 \neq a_{22},\ c_3 \neq a_{33},\ ...$

eli yleisesti

$c_n \neq a_{nn}$ kaikilla n.

Muuttaminen voidaan suorittaa esimerkiksi seuraavalla säännöllä:
Jos $a_{nn} < 5$, niin $c_n = 8$, ja jos $a_{nn} \geqslant 5$, niin $c_n = 2$.

Luvulla c on siis eri ensimmäinen desimaali kuin luvulla a_1, joten $c \neq a_1$. Luvulla c on eri toinen desimaali kuin luvulla a_2, joten $c \neq a_2$, eri kolmas desimaali kuin luvulla a_3, joten $c \neq a_3$ jne. Luku c ei ole mikään jonon $a_1,\ a_2,\ ...$ luvuista, sillä se poikkeaa aina n:nnen desimaalin kohdalla luvusta a_n.

Siis jono $a_1,\ a_2,\ ...$ ei sisällä kaikkia välin $]0, 1[$ lukuja. Koska mikään välin $]0, 1[$ luvuista muodostuva jono ei sisällä kaikkia välin lukuja, joukko $]0, 1[$ ei ole numeroituva. □

Tehtävän 348 nojalla reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ on yhtä monta alkiota kuin välillä $]0, 1[$, joten myöskään joukko $\mathbb{R}$ ei ole numeroituva. Sellaisia äärettömiä joukkoja, joissa on enemmän alkioita kuin positiivisten kokonaislukujen joukossa, kutsutaan *ylinumeroituviksi*.

351. Osoita, että irrationaalilukujen joukko on ylinumeroituva. ”Suurin osa” reaaliluvuista on siis irrationaalilukuja. (Ohje: Osoita, että jos irrationaalilukujen joukko olisi numeroituva, niin kaikkien reaalilukujen joukko olisi numeroituva.)

Edellä havaittiin, että äärettömiä joukkoja on ainakin kahta eri kokoa: positiivisten kokonaislukujen joukon kokoisia ja reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ kokoisia. Itse asiassa äärettömiä joukkoja on äärettömän monta eri kokoa. Voidaan nimittäin osoittaa, että jokaisella joukolla on enemmän osajoukkoja kuin alkioita. Siis jos A on mikä tahansa joukko, niin joukon A osajoukkojen joukossa $\mathcal{P}(A)$ (joukon A *potenssijoukossa*) on enemmän alkioita kuin joukossa A. Aloittamalla reaalilukujen joukosta $\mathbb{R}$ ja muodostamalla joukon $\mathbb{R}$ osajoukkojen joukko, joukon $\mathbb{R}$ osajoukkojen joukon osajoukkojen joukko jne. saadaan jono toinen toistaan suurempia äärettömiä joukkoja:

$\mathbb{R},\ \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))),\ ...\ .$

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ derivaatat

Seuraavassa johdetaan derivointikaavat
$\mathrm{D}\sin x = \cos x$ ja $\mathrm{D}\cos x = -\sin x$.

Derivointikaavat johdetaan osoittamalla ensin, että ne pitävät paikkansa kohdassa 0. Sen jälkeen tulos yleistetään muihin kohtiin käyttämällä sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoja.

Raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

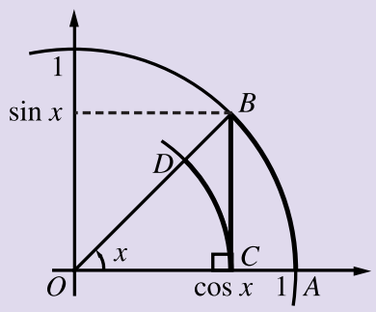
Funktion $\sin x$ muotoa $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ oleva erotusosamäärä kohdassa 0 on

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x - 0}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Osoitetaan, että erotusosamäärän raja-arvo, kun x lähenee nollaa, on $\cos 0 = 1$.

Oletetaan ensin, että muuttujan x arvot ovat välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Piirretään kulmaa x vastaavaan yksikköympyrän sektoriin ympyränkaari, jonka säteenä on $\cos x$. Muodostuvien kuvioiden pinta-aloille pätee



sektori $OCD <$ kolmio $OCB <$ sektori OAB.

Laskemalla pinta-alat saadaan:

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cos^2 x < \frac{1}{2} \cos x \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 \qquad \big| \cdot 2$$

$$x \cos^2 x < \cos x \sin x < x \qquad \big| : x \cos x > 0$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Koska $\cos(-x) = \cos x$ ja $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$, niin epäyhtälöt

$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}$ pätevät myös silloin, kun muuttujan x arvot ovat välillä $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

Koska kosinifunktio on jatkuva ja $\cos 0 = 1$, niin muuttujan x arvojen lähetessä arvoa 0 molempien funktioiden $\cos x$ ja $\frac{1}{\cos x}$ arvot lähenevät lukua 1.

Koska funktion $\frac{\sin x}{x}$ arvot ovat $\cos x$:n ja $\frac{1}{\cos x}$:n välissä, ne kuristuvat kohti raja-arvoa 1.

Siis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Funktion $\cos x$ muotoa $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ oleva erotusosamäärä kohdassa 0 on

$$\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Osoitetaan, että erotusosamäärän raja-arvo, kun x lähenee nollaa, on $\sin 0 = 0$.

Muokataan erotusosamäärän lauseke sellaiseen muotoon, että voidaan käyttää hyväksi raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}$$ Lavennetaan summalla $\cos x + 1$.

$$= \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$ Käytetään kaavaa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$= \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$ Ryhmitellään.

$$= -\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$ Käytetään hyväksi raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\to -1 \cdot \frac{\sin 0}{\cos 0 + 1} = -1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0, \text{ kun } x \to 0$$

Siis $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Funktion $\sin x$ derivointikaava

Derivointikaavan johdossa käytetään hyväksi sinin yhteenlaskukaavaa

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Muodostetaan funktion $\sin x$ muotoa $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ oleva erotusosamäärä kohdassa a ja määritetään erotusosamäärän raja-arvo, kun h lähenee nollaa.

$\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ Sinin yhteenlaskukaava.

$= \dfrac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h}$ Muokataan lauseketta.

$= \dfrac{\sin a(\cos h - 1) + \cos a \sin h}{h}$

$= \sin a \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos a \dfrac{\sin h}{h}$ Sovelletaan edellä todistettuja raja-arvoja.

$\to \sin a \cdot 0 + \cos a \cdot 1 = \cos a$, kun $h \to 0$

Siis funktion $\sin x$ derivaatta jokaisessa kohdassa a on $\cos a$, eli

$\mathrm{D} \sin x = \cos x$.

Funktion $\cos x$ derivointikaava

Derivointikaavan johdossa käytetään hyväksi kosinin yhteenlaskukaavaa

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$

Muodostetaan funktion $\cos x$ erotusosamäärä kohdassa a ja määritetään erotusosamäärän raja-arvo, kun h lähenee nollaa.

$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$$ Kosinin yhteenlaskukaava.

$$= \frac{\cos a \cos h - \sin a \sin h - \cos a}{h}$$

$$= \frac{\cos a(\cos h - 1) - \sin a \sin h}{h}$$

$$= \cos a \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \frac{\sin h}{h}$$ Sovelletaan edellä todistettuja raja-arvoja.

$\to \cos a \cdot 0 - \sin a \cdot 1 = -\sin a$, kun $h \to 0$

Siis funktion $\cos x$ derivaatta jokaisessa kohdassa a on $-\sin a$, eli

$$\mathrm{D}\cos x = -\sin x.$$

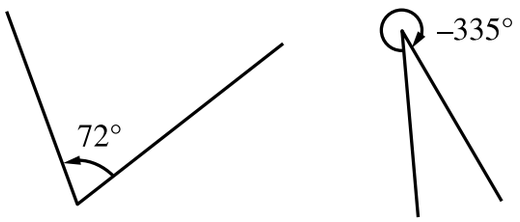
Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

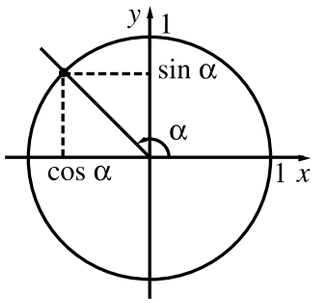
Trigonometria

Suunnatun kulman kosini, sini ja tangentti

Suunnatulla kulmalla on alkukylki ja loppukylki. Kiertosuunta vastapäivään on positiivinen kiertosuunta, ja kiertosuunta myötäpäivään on negatiivinen kiertosuunta.

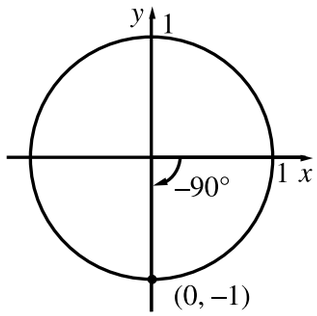


Suunnatun kulman sini ja kosini määritellään yksikköympyrän avulla. Kulma α sijoitetaan koordinaatistoon niin, että kulman kärki on origossa ja alkukylki on positiivinen x-akseli. Kulman α loppukyljen ja yksikköympyrän leikkauspistettä sanotaan kulman α kehäpisteeksi.



Kulman α kosini on kulman α kehäpisteen x-koordinaatti.

Kulman α sini on kulman α kehäpisteen y-koordinaatti.



$\cos(-90°) = 0$

$\sin(-90°) = -1$

Koska $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$ ovat yksikköympyrän pisteen koordinaatit, niin Pythagoraan lauseen nojalla on

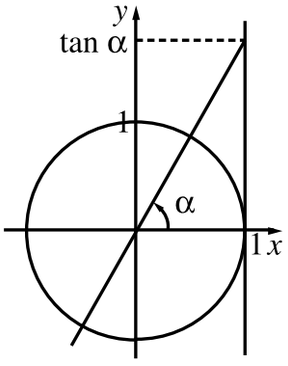
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Kulman α tangentti on yhtä suuri kuin kulman α sini jaettuna kosinilla

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Tangentti ei ole määritelty, kun $\cos\alpha = 0$ eli kun $\alpha = 90° + n \cdot 180°$, missä n on kokonaisluku.

Tangentti voidaan määritellä myös yksikköympyrän avulla. Kulman α tangentti on kulman α tangenttipisteen y-koordinaatti.



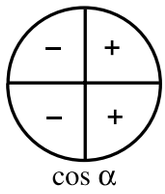
Määritetään $\cos\alpha$, kun $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ja $90° < \alpha < 180°$.

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ tai } \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

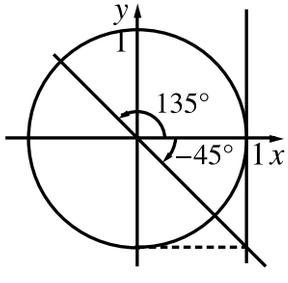
Koska kulma α on toisessa neljänneksessä, sen kosini on negatiivinen.

Siis $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.



Jos $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ja $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, niin

$$\tan\alpha = \frac{2}{3} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$



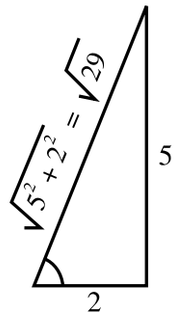
$\tan(-45°) = \tan 135° = -1$

Jos kulman α tangentti tunnetaan, niin $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ voidaan päätellä geometrisesti.

Määritetään $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$, kun $\tan\alpha = -2{,}5$ ja $270° < \alpha < 360°$.

Ensin lasketaan tangentin, sinin ja kosinin itseisarvoilla.

Jos suorakulmaisen kolmion terävän kulman tangentti on $2{,}5 = \frac{5}{2}$, niin saman kulman sini on $\frac{5}{\sqrt{29}}$ ja kosini $\frac{2}{\sqrt{29}}$.

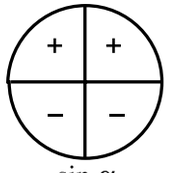


Siis

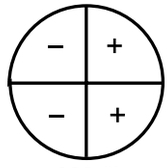
$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \quad \text{tai} \quad \sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}}$$

ja

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \text{tai} \quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{29}}.$$



$\sin\alpha$



$\cos\alpha$

Koska kulma α on neljännessä neljänneksessä, niin

$$\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}} \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

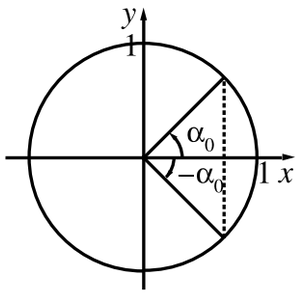
Kulman ratkaiseminen

Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön

$\cos \alpha = a$,

niin yhtälön $\cos \alpha = a$ ratkaisu on

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -\alpha_0 + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku.

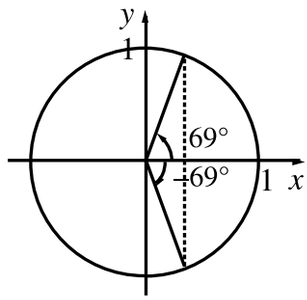


Yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön

$\cos \alpha = 0{,}36$,

on (asteen tarkkuudella) kulma $69°$.
Yhtälö toteutuu, kun

$\alpha \approx 69° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx -69° + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku.

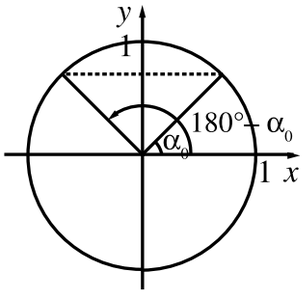


Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön

$\sin \alpha = a$,

niin yhtälön $\sin \alpha = a$ ratkaisu on

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$ tai $\alpha = 180° - \alpha_0 + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku.



Yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön

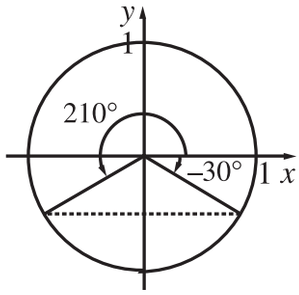
$\sin \alpha = -\frac{1}{2}$,

on kulma $210°$. Yhtälö toteutuu, kun

$\alpha = 210° + n \cdot 360°$ tai
$\alpha = 180° - 210° + n \cdot 360°$,

eli kun

$\alpha = 210° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -30° + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku.



Vastaavasti yhtälö

$\sin 3\alpha = -\frac{1}{2}$

toteutuu, kun

$3\alpha = 210° + n \cdot 360°$ tai $3\alpha = -30° + n \cdot 360°$,

eli kun

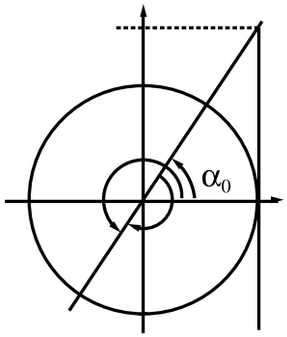
$\alpha = 70° + n \cdot 120°$ tai $\alpha = -10° + n \cdot 120°$,
n kokonaisluku.

Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön

$\tan \alpha = a$,

niin yhtälön $\tan \alpha = a$ ratkaisu on

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.



Ratkaistaan asteen tarkkuudella yhtälö

$2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0$.

Yhtälö voidaan saattaa muotoon $\tan \alpha = a$.

$$2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0$$

$$2 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \qquad \big| : 2 \cos \alpha \neq 0$$

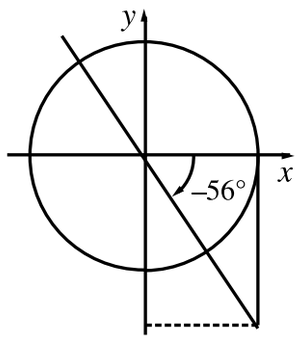
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{2}$$

$$\tan \alpha = -\frac{3}{2}$$

Laskimella saadaan kulma $-56°$.

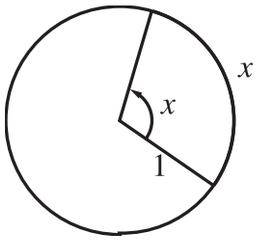
Yhtälö toteutuu, kun

$\alpha \approx -56° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.



Radiaani

Positiivisen kulman suuruus radiaaneina on kulmaa vastaavan yksikköympyrän kaaren pituus. Negatiivisen kulman suuruus radiaaneina on kaaren pituuden vastaluku.



Koska yksikköympyrän kehän pituus on 2π, niin täysikulman suuruus radiaaneina on $2\pi \approx 6{,}28$, oikokulman $\pi \approx 3{,}14$ ja suorakulman $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

Yksikkömuunnokset asteiden ja radiaanien välillä voidaan perustaa oikokulmaan:

π radiaania on $180°$.

Koska π radiaania on $180°$, niin

yksi radiaani on $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$,

$7{,}28$ radiaania on $7{,}28 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 417°$

ja

$\frac{5\pi}{12}$ radiaania on $\frac{5 \cdot \overset{15°}{\cancel{180°}}}{\underset{1}{\cancel{12}}} = 75°$.

Koska $180°$ on π radiaania, niin

$1°$ on $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$ radiaania,

$216°$ on $216 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 3{,}77$ radiaania

ja

$120°$ on $\frac{\overset{2}{\cancel{120}} \cdot \pi}{\underset{3}{\cancel{180}}} = \frac{2\pi}{3}$ radiaania.

Trigonometriset funktiot

Kun tutkitaan sinin, kosinin ja tangentin syvällisempiä matemaattisia ominaisuuksia, trigonometristen funktioiden $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$ muuttuja ilmaistaan yleensä radiaaneina.

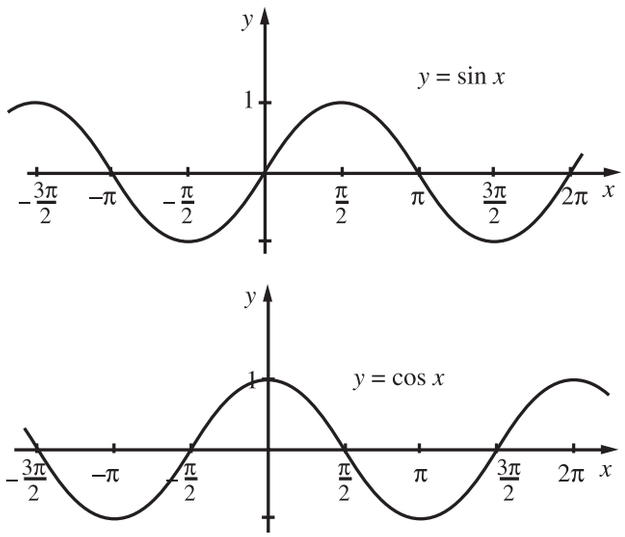
Funktioiden ominaisuudet havainnollistuvat niiden kuvaajissa.

Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat määritellyt koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ ja ne ovat kaikkialla jatkuvia.

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ jakso on täysikulma 2π.

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Yhdistettyjen funktioiden $\sin kx$ ja $\cos kx$ jakson pituus on $\frac{2\pi}{k}$.



Funktion $\sin 4x$ jakson pituus on $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Funktion $\cos \frac{x}{3}$ jakson pituus on

$2\pi : \frac{1}{3} = 3 \cdot 2\pi = 6\pi.$

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$.

Kaikilla muuttujan x arvoilla on

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ ja $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Funktio $\tan x$ on määritelty, kun

$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

Funktio $\tan x$ on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

Funktion $\tan x$ jakso on oikokulma π.

$\tan (x + \pi) = \tan x$

Funktion $\tan x$ arvojoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Kun muuttujan x arvo vaihdetaan vastaluvuksi $-x$, niin sinin arvo vaihtuu vastaluvuksi ja kosinin arvo pysyy samana.

$\sin (-x) = -\sin x$
$\cos (-x) = \cos x$

Määritetään funktion $f(x) = 7 - 3 \sin x$ pienin ja suurin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

Koska funktion $\sin x$ arvojoukko on $[-1, 1]$, niin funktion $3 \sin x$ arvojoukko on $[-3, 3]$.

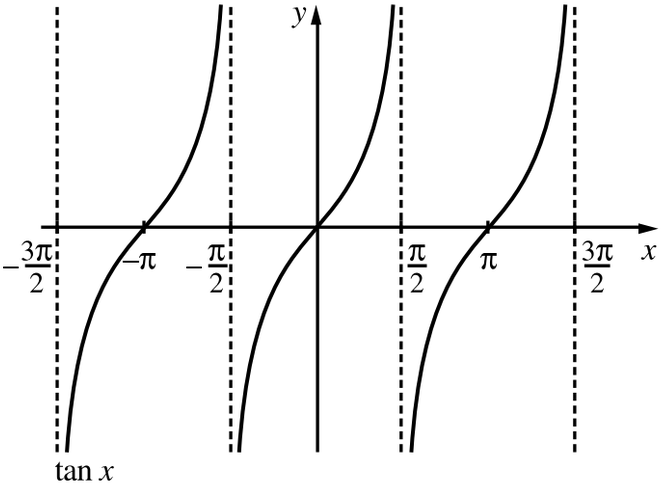
Funktion $f(x) = 7 - 3 \sin x$ pienin arvo on $7 - 3 = 4$ ja suurin arvo $7 - (-3) = 10$.

Funktio f saa pienimmän arvonsa kohdissa, joissa $\sin x = 1$, eli kohdissa

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.

Funktio f saa suurimman arvonsa kohdissa, joissa $\sin x = -1$, eli kohdissa

$x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.



Yhtälö $\cos x = 0{,}25$ toteutuu, kun

$x \approx 1{,}3 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -1{,}3 + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku.

Kun muuttujan arvo x vaihdetaan suplementtiarvoksi $\pi - x$, niin sinin arvo pysyy samana ja kosinin arvo vaihtuu vastaluvuksi.

$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$

Yhtälö $\sin x \approx -0{,}74$ toteutuu, kun

$x \approx -0{,}83 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx \pi - (-0{,}83) + n \cdot 2\pi$

eli kun

$x \approx -0{,}83 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 3{,}97 + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku.

Trigonometristen funktioiden derivaatat

Kun trigonometrisia funktioita tutkitaan derivaatan avulla, muuttujan yksikkö on radiaani.

Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat derivoituvia kaikkialla ja niiden derivaattafunktiot ovat:

$\mathrm{D}\sin x = \cos x$

$\mathrm{D}\cos x = -\sin x.$

$\mathrm{D}\,3\sin x = 3\cos x$

$\mathrm{D}\cos^3 x = 3\cos^2 x \cdot \mathrm{D}\cos x$

$= 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x$

Funktio $\tan x$ on derivoituva koko määrittelyjoukossaan ja

$$\mathrm{D}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

missä $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

$$\mathrm{D}(\tan x - x) = \mathrm{D}\tan x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$= 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$$

Yhdistettyjen funktioiden $\sin f(x)$ ja $\cos f(x)$ derivaattafunktiot ovat:

$\mathrm{D}\sin f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$

$\mathrm{D}\cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x).$

$\mathrm{D}\sin 3x = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$

$$\mathrm{D}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot (-1)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Trigonometrisia funktioita tutkittaessa käytetään hyväksi niiden ominaisuuksia.

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$.

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jaksollisia. Molempien funktioiden jakso on 2π.

Osoitetaan, että funktio $g(x) = \sin 2x - 2x$ on kaikkialla aidosti vähenevä.

Derivoidaan funktio g.

$g'(x) = 2 \cos 2x - 2$

Koska $\cos 2x \leqslant 1$ kaikilla x, niin

$g'(x) = 2 \cos 2x - 2 \leqslant 2 \cdot 1 - 2 = 0$

kaikilla x.

Derivaattafunktion $g'(x)$ arvo on nolla, kun:

$\cos 2x = 1$

$2x = n \cdot 2\pi$

$x = n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

Koska $g'(x) \leqslant 0$ kaikkialla ja $g'(x) = 0$ vain erillisissä kohdissa, funktio g on kaikkialla aidosti vähenevä.

Määritetään funktion $f(x) = 3 \sin^2 x + 2 \cos^3 x$ suurin ja pienin arvo.

Koska funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jaksollisia jaksona 2π, niin myös funktio f on jaksollinen jaksona 2π. Funktio f saa jokaisen arvonsa jakson pituisella suljetulla välillä $[0, 2\pi]$, joten riittää, että määritetään funktion f suurin ja pienin arvo tällä välillä.

Derivoidaan:

$f'(x) = 3 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot 3 \cos^2 x \, (-\sin x)$

$= 6 \sin x \cos x - 6 \sin x \cos^2 x.$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$6 \sin x \cos x - 6 \sin x \cos^2 x = 0$

$6 \sin x \cos x (1 - \cos x) = 0$

$\sin x = 0$ tai $\cos x = 0$ tai $1 - \cos x = 0$

$\sin x = 0$ tai $\cos x = 0$ tai $\cos x = 1$

$x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = n \cdot 2\pi$

Nollakohtien parvet voidaan yhdistää muotoon $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku.

Välillä $]0, 2\pi[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat $\frac{\pi}{2}$, π ja $\frac{3\pi}{2}$.

Lasketaan funktion $f(x) = 3 \sin^2 x + 2 \cos^3 x$ arvo välillä $]0, 2\pi[$ olevissa derivaattafunktion nollakohdissa ja välin $[0, 2\pi]$ päätepisteissä.

$f(\frac{\pi}{2}) = 3 \sin^2 \frac{\pi}{2} + 2 \cos^3 \frac{\pi}{2}$

$= 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^3 = 3$

$f(\pi) = 3 \sin^2 \pi + 2 \cos^3 \pi$

$= 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^3 = -2$

$f(\frac{3\pi}{2}) = 3 \sin^2 \frac{3\pi}{2} + 2 \cos^3 \frac{3\pi}{2}$

$= 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 0^3 = 3$

$f(2\pi) = f(0) = 3 \sin^2 0 + 2 \cos^3 0$

$= 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^3 = 2$

Funktion f suurin arvo on 3 ja pienin arvo -2.

Kaikilla muuttujan x arvoilla on

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Määritetään toisella tavalla funktion $f(x) = 3\sin^2 x + 2\cos^3 x$ suurin ja pienin arvo.

Koska $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, niin funktion f lauseke voidaan saattaa muotoon, jossa esiintyy pelkästään $\cos x$.

$$f(x) = 3(1 - \cos^2 x) + 2\cos^3 x$$
$$= 3 - 3\cos^2 x + 2\cos^3 x$$

Merkitään $\cos x = t$. Koska funktion $\cos x$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$, funktion f suurin ja pienin arvo löydetään, kun määritetään funktion

$$g(t) = 3 - 3t^2 + 2t^3$$

suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-1, 1]$.

Derivoidaan funktio g ja ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$g'(t) = -6t + 6t^2$$

$$-6t + 6t^2 = 0$$
$$6t(-1 + t) = 0$$
$$t = 0 \text{ tai } t = 1$$

Välillä $]-1, 1[$ on derivaattafunktion nollakohta 0. Lasketaan funktion $g(t) = 3 - 3t^2 + 2t^3$ arvo välillä $]-1, 1[$ olevassa derivaattafunktion nollakohdassa ja välin $[-1, 1]$ päätepisteissä.

$$g(0) = 3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^3 = 3$$

$$g(-1) = 3 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^3$$
$$= 3 - 3 - 2 = -2$$

$$g(1) = 3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3 = 3 - 3 + 2 = 2$$

Funktion g suurin arvo välillä $[-1, 1]$ on 3 ja pienin arvo -2. Siis funktion f suurin arvo on 3 ja pienin arvo -2.

Lukujono

Lukujono on kuvailtava sellaisella tavalla, joka määrää yksikäsitteisesti jokaisen jonon jäsenen.

Alkulukujen jono alkaa

$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17, \ldots$.

Lukujonon jäseniä merkitään alaindeksillä varustetulla kirjaimella. Yleensä indeksit ovat positiivisia kokonaislukuja:

$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$,

jolloin indeksi ilmaisee jäsenen järjestysnumeron. Jono $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ voidaan merkitä lyhyesti (a_n).

Jos (a_n) on alkulukujen jono, niin $a_1 = 2,\ a_2 = 3$ ja esimerkiksi $a_9 = 23$.

Jokainen funktio f, jonka muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja $1,\ 2,\ 3, \ldots$, määrää lukujonon $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$, kun asetetaan $a_n = f(n)$.

Jos funktiolla f on lauseke, niin lausekkeeseen sijoittamalla voidaan suoraan laskea mikä tahansa jonon jäsen. Lauseketta sanotaan jonon lausekkeeksi.

Lausekkeen avulla määritelty lukujono

$a_n = (-1)^{n+1}\,\dfrac{n}{n+1}$ alkaa $\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4}, \ldots$

ja esimerkiksi $a_{786} = -\dfrac{786}{787}$.

Jos jonon jäsenet a_n on määritelty jonon edellisten jäsenten avulla, kyseessä on rekursiivinen lukujono.

Määrittelemällä, että jonon ensimmäinen jäsen on luku 3, ja toisesta jäsenestä alkaen jokainen jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 4 ja vähentämällä tulosta luku 1, saadaan jono, joka alkaa

$3,\ 11,\ 43,\ 171, \ldots$.

Jono voidaan kuvailla myös rekursiokaavalla:

$a_1 = 3$ ja $a_n = 4a_{n-1} - 1$, kun $n \geqslant 2$.

Aritmeettinen jono

Lukujono, jonka jäsenen ja edellisen jäsenen erotus on aina sama, on aritmeettinen jono. Siis jono (a_n) on aritmeettinen jono, jos ja vain jos on olemassa luku d niin, että

$a_{n+1} - a_n = d$

kaikilla n.

Jono $a_n = 6n - 5$ on aritmeettinen, sillä

$$a_{n+1} - a_n = 6(n+1) - 5 - (6n - 5)$$
$$= 6n + 6 - 5 - 6n + 5 = 6$$

kaikilla n.

Aritmeettisen jonon jokainen jäsen saadaan aina lisäämällä edelliseen jäseneen sama luku d.

Jos jonon ensimmäinen luku on -7 ja peräkkäisten jäsenten erotus $d = 4$, kyseessä on aritmeettinen jono

$-7,\ -3,\ 1, \ldots$.

Aritmeettisen jonon

$$\begin{array}{cccccc} & +d & +d & +d & +d & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots & \end{array}$$

n. jäsen a_n saadaan lisäämällä jonon ensimmäiseen jäseneen $n - 1$ kappaletta lukuja d, eli

$a_n = a_1 + (n - 1)d.$

Aritmeettisen jonon $-7,\ -3,\ 1, \ldots$
25. jäsen on

$a_{25} = -7 + 24 \cdot 4 = 89.$

Yleisesti

$a_n = -7 + (n - 1) \cdot 4 = -11 + 4n.$

Geometrinen jono

Lukujono, jonka jokaisen jäsenen suhde edelliseen jonon jäseneen on yhtä suuri, on geometrinen jono. Siis jono (a_n) on geometrinen, jos ja vain jos on olemassa luku q niin, että

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kaikilla n.

Jonon jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen luvulla q.

Geometrisen jonon

$$\begin{array}{cccccc} & \cdot q & \cdot q & \cdot q & \cdot q & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots \end{array}$$

n. jäsen a_n saadaan ensimmäisestä jäsenestä kertomalla se $n-1$ kertaa luvulla q, eli

$$a_n = q^{n-1}\, a_1.$$

Jono $a_n = \dfrac{1}{5^{2n}}$ on geometrinen, sillä

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5^{2(n+1)}} : \frac{1}{5^{2n}} = \frac{1}{5^{2n+2}} \cdot 5^{2n}$$

$$= \frac{5^{2n}}{5^2 5^{2n}} = \frac{1}{25}$$

kaikilla n.

Jos ensimmäinen luku $a_1 = 5$ ja peräkkäisten jäsenten suhde $q = -2$, kyseessä on geometrinen jono

$5,\ -10,\ 20,\ -40, \ldots$.

Geometrisen jonon $5,\ -10,\ 20,\ -40, \ldots$ 12. jäsen on

$$a_{12} = (-2)^{11} \cdot 5 = -10\,240.$$

Yleisesti

$$a_n = (-2)^{n-1} \cdot 5.$$

Rekursiivinen jono

Usein ilmiö on mahdollista hahmottaa muodostamalla sitä kuvaava rekursiivinen jono.

Eliöpopulaation suuruus ensimmäisen tutkimusvuoden alussa oli 1 500. Kanta kasvaa joka vuosi luontaisesti 8 %, mutta aina vuoden lopussa kannasta muuttaa pois 100 jäsentä. Olkoon a_n populaation suuruus n. vuoden alussa. Jono (a_n) voidaan kuvailla rekursiivisesti.

$a_1 = 1500$ ja
$a_n = 1{,}08a_{n-1} - 100$, kun $n \geqslant 2$

Jonon jäsen lasketaan aina kertomalla edellinen jäsen luvulla 1,08 ja vähentämällä tulosta 100. Laskemisessa voidaan käyttää hyväksi laskimen [Ans] -näppäintä. Jono alkaa:

1500, 1520, 1542, 1565, 1590, 1617, … .

Rekursiiviselle jonolle voidaan joskus löytää lauseke.

Jono
$a_1 = 7$ ja $a_n = 5a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$,
on geometrinen jono, sillä jäsen saadaan aina edellisestä jäsenestä kertomalla luvulla 5. Siis

$a_n = 5^{n-1} \cdot 7$.

Aritmeettinen summa

Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan aritmeettiseksi summaksi.

Aritmeettisen summan
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ arvo on

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Kaavassa
a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava,
a_n on viimeinen yhteenlaskettava,
n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Lasketaan aritmeettisen jonon 20, 33, … viidentoista ensimmäisen jäsenen summa. Jonon 15. jäsen on $20 + 14 \cdot 13 = 202$, ja 15 ensimmäisen jäsenen summa on

$$15 \cdot \frac{20 + 202}{2} = 1665.$$

Geometrinen summa

Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan geometriseksi summaksi.

Kun lasketaan yhteen geometrisen jonon

$a,\ aq,\ aq^2, \ldots$

n ensimmäistä jäsentä, niin tämän geometrisen summan arvo on

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Kaavassa
a on summan ensimmäinen jäsen,
q on jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku,
n on yhteenlaskettujen jäsenten lukumäärä.

Summa

$$5 - 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 - \ldots + 5 \cdot 3^{12}$$

on geometrinen summa, jonka ensimmäinen jäsen on 5, peräkkäisten jäsenten suhde -3 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 13. Summan arvo on

$$\frac{5(1 - (-3)^{13})}{1 - (-3)} = 1\,992\,905.$$

Säännöllinen tallettaminen tilille, jonka korko on 3,75 %, aloitettiin vuonna 2000. Joka vuoden alussa talletetaan 3 000 euroa. Minkä vuoden lopussa tilillä on päättyvän vuoden korkojen lisäämisen jälkeen yli 75 000 euroa? Koron lähdeveroa ei oteta huomioon.

Hahmotus yksinkertaistuu, jos ajatellaan, että jokainen talletus tehdään eri tilille.

Vuoden $2000 + n$ lopussa ensimmäinen talletus on tullut $1{,}0375^{n+1}$-kertaiseksi, toinen $1{,}0375^{n}$-kertaiseksi jne. Viimeinen (saman vuoden alussa tehty) talletus on tullut $1{,}0375$-kertaiseksi. Tilillä oleva rahamäärä on geometrinen summa

$$1{,}0375 \cdot 3\,000 + \ldots + 1{,}0375^{n+1} \cdot 3\,000$$

$$= \frac{1{,}0375 \cdot 3\,000 \cdot (1 - 1{,}0375^{n+1})}{1 - 1{,}0375}$$

$$= 83\,000\,(1{,}0375^{n+1} - 1).$$

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$83\,000\,(1{,}0375^{n+1} - 1) > 75\,000$$

$$83\,000 \cdot 1{,}0375^{n+1} - 83\,000 > 75\,000$$

$$83\,000 \cdot 1{,}0375^{n+1} > 158\,000$$

$$1{,}0375^{n+1} > \frac{158}{83}$$

$$\ln 1{,}0375^{n+1} > \ln \frac{158}{83}$$

$$(n+1) \ln 1{,}0375 > \ln \frac{158}{83}$$

$$n + 1 > \frac{\ln \frac{158}{83}}{\ln 1{,}0375}$$

$$n > \frac{\ln \frac{158}{83}}{\ln 1{,}0375} - 1 \approx 16{,}5$$

Tilillä on yli $75\,000$ euroa vuoden $2000 + 17 = 2017$ lopussa.

Rekursiiviselle lukujonolle, joka on muotoa

$a_1 = a$ ja $a_n = qa_{n-1} + b$, kun $n \geqslant 2$

voidaan löytää lauseke geometrisen summan avulla:

$a_2 = qa + b$

$a_3 = q(qa + b) + b = q^2a + qb + b$

$a_4 = q(q^2a + qb + b) + b$

$= q^3a + q^2b + qb + b.$

Huomataan, että

$a_n = q^{n-1}a + q^{n-2}b + q^{n-3}b + \ldots + b$

$= q^{n-1}a + \dfrac{b(1 - q^{n-1})}{1 - q}.$

Eliöpopulaation suuruus ensimmäisen tutkimusvuoden alussa oli 1 500. Kanta kasvaa joka vuosi luontaisesti 8 %, mutta aina vuoden lopussa kannasta muuttaa pois 100 jäsentä. Olkoon a_n populaation suuruus n. vuoden alussa. Tällöin

$a_1 = 1500$ ja

$a_n = 1{,}08a_{n-1} - 100$, kun $n \geqslant 2$.

Jonolla on lauseke

$$a_n = 1{,}08^{n-1} \cdot 1500 + \frac{-100(1 - 1{,}08^{n-1})}{1 - 1{,}08}$$

$$= 1{,}08^{n-1} \cdot 1500 + 1250(1 - 1{,}08^{n-1})$$

$$= 1{,}08^{n-1} \cdot 250 + 1250.$$

KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

SUUNNATUN KULMAN SINI, KOSINI JA TANGENTTI

352. Määritä ainakin kaksi positiivista ja ainakin kaksi negatiivista kulmaa, jotka voidaan piirtää niin, että niillä on sama alku- ja loppukylki kuin kulmalla, jonka suuruus on $130°$.

353. Määritä kaikki kulmat α, joiden
a) kosini on 0 b) sini on -1.
Mitkä kulmista ovat välillä $-720° \leqslant \alpha \leqslant 0°$?

354. Määritä kulman α sini ja tangentti, kun $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ ja $180° < \alpha < 360°$.

355. Määritä kulman α sini ja kosini, kun $\tan\alpha = -3$ ja $90° < \alpha < 270°$.

KULMAN RATKAISEMINEN

Seuraavissa tehtävissä 356–361 kulman yksikkö on aste.

356. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.
a) $\cos\alpha = -0{,}76$
b) $\sin\alpha = 0{,}42$
c) $\tan\alpha = 5$

357. Määritä kaikki kulmat, joiden
a) kosini on $\frac{1}{2}$ b) sini on $-\frac{1}{2}$.

358. Ratkaise asteen tarkkuudella yhtälö $\sin\alpha - 3\cos\alpha = 0$.

359. Ratkaise yhtälö $\cos 6\alpha = 1$.

360. Ratkaise yhtälö $\sqrt{2}\sin(3\alpha + 30°) = 1$. Mitkä välin $[-180°, 180°]$ kulmat toteuttavat yhtälön?

361. Ratkaise yhtälö $\cos 4\alpha = \cos 2\alpha$.

RADIAANI

362. Kulman suuruus radiaaneina on
a) $0{,}16$ b) $-17{,}0$.
Ilmaise kulman suuruus asteina yhtä monen numeron tarkkuudella.

363. Mikä kulman suuruus on asteina, jos sen suuruus radiaaneina on a) $-\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{4}$?

364. Ilmaise kulman suuruus radiaaneina yhtä monen numeron tarkkuudella.
a) $17°$ b) $-421°$

365. Ilmaise kulman suuruus radiaaneina (tarkka arvo).
a) $135°$ b) $-210°$

366. Määritä kulmat, joiden
a) sini on nolla b) kosini on -1.
Käytä kulman yksikköä radiaani.

367. Laske funktion $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi) - \cos 5x$ arvo, kun
a) $x = \pi$ b) $x = \frac{\pi}{3}$.

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

368. Määritä funktion jakson pituus ja arvojoukko.

a) $\sin 6x$ b) $6\cos\frac{x}{2}$

369. Määritä funktion
a) $f(x) = 5 - 7\cos x$
b) $g(x) = 3 + 7\sin 2x$
suurin ja pienin arvo.
Missä kohdissa funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

370. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $3\sin x + a = 1$ on ratkaisuja?

371. Määritä $\sin x$ ja $\tan x$, kun $\cos x = -\frac{2}{5}$ ja x on välillä $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

372. Ratkaise yhtälö kahden desimaalin tarkkuudella.
a) $\sin x = -0{,}92$
b) $\cos x = 0{,}41$
c) $\tan x = -3{,}14$

373. Määritä funktion nollakohdat.
a) $\sqrt{2}\sin x - 1$
b) $2\cos x + 1$
c) $\cos 2x + 1$

374. Millä muuttujan arvoilla funktioiden $\sin 3x$ ja $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ arvot ovat yhtä suuret?

375. Määritä funktion $\cos^2 x + \cos x$ nollakohdat.

376. Missä kohdissa funktio a) $4\sin^2 x$ b) $\tan^2 x$ saa arvon 3?

377. Ratkaise yhtälö $2\sin^2 x + \cos x - 2 = 0$.

TRIGONOMETRISTEN FUNKTIOIDEN DERIVAATAT

378. Derivoi funktio $2\sin x + \sin 2x + \sin^2 x$.

379. Derivoi funktio.
a) $\frac{3}{\cos x}$
b) $\ln(\sin x)$
c) $\cos^2\frac{x}{2}$

380. Määritä kertoimet a ja b niin, että funktiolle $f(x) = a\cos 2x + b\sin 3x$ pätee
$f(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}) = 1$.

381. Funktion $f(x) = \sin x$ kuvaajalle piirretään tangentit kuvaajan ja x-akselin kahteen leikkauspisteeseen. Osoita, että tangentit ovat joko yhdensuuntaiset tai toisiaan vastaan kohtisuorassa.

382. Ratkaise funktion derivaattafunktion nollakohdat.
a) $f(x) = \cos x + x$
b) $g(x) = \cos 2x + x$

383. Osoita, että funktio $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 3x$ on kaikkialla aidosti kasvava.

384. Määritä funktion $f(x) = \tan x - 2x$ välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ olevat ääriarvokohdat ja ääriarvot.

385. Määritä funktion $f(x) = 2\sin x - \cos^2 x$ suurin ja pienin arvo.

386. Määritä funktion $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ suurin ja pienin arvo.

387. Ratkaise funktion
$f(x) = \sin x\cos x - \sin x + x$
derivaattafunktion nollakohdat.

388. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on $2a$. Kolmion kylkien pituuksien summasta vähennetään kannalle piirretyn korkeusjanan pituus. Määritä kolmion kantakulman suuruus niin, että erotuksen arvo on mahdollisimman pieni.

LUKUJONO

389. Jonon $\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \ldots$ jäsenten osoittajat kasvavat aina yhdellä, ja nimittäjät ovat peräkkäisiä neliölukuja. Ilmaise jono lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.

390. Määritä jonon lauseke.
a) jono $4, -4, 4, -4, \ldots$, jossa luvut 4 ja -4 vuorottelevat
b) jono $8, 0, 8, 0, \ldots$, jossa luvut 8 ja 0 vuorottelevat
c) jono $6, -2, 6, -2, \ldots$, jossa luvut 6 ja -2 vuorottelevat

391. Onko luku 10 jokin jäsen jonossa (a_n), jossa $a_n = \frac{n^2 + 21}{2n - 3}$? Jos on, niin kuinka mones jonon jäsen luku 10 on?

392. Olkoon $a_n = \frac{3n + 5}{n + 2}$. Onko jono (a_n) aidosti kasvava tai aidosti vähenevä? Perustele.

ARITMEETTINEN JONO

393. Osoita, että jokainen jono (a_n), joka on muotoa $a_n = kn + b$, on aritmeettinen jono.

394. Ilmaise aritmeettinen jono $3, 7, 11, \ldots$ lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$. Mikä jonon $130.$ jäsen on?

395. Katsomoon rakennetaan 15 istuintasoa, joista alin on $1{,}20$ metrin ja ylin $5{,}40$ metrin korkeudella. Millä korkeudella kymmenes istuintaso on?

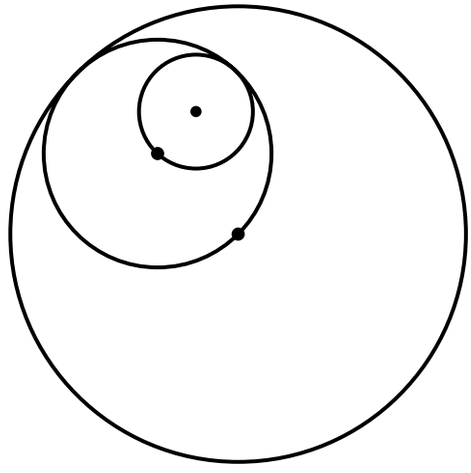
396. Aritmeettisen jonon kahdeskymmenes jäsen on $2\,440$ ja neljäskymmenes jäsen $-2\,360$. Mikä jonon ensimmäinen jäsen on?

GEOMETRINEN JONO

397. Osoita, että jokainen jono (a_n), joka on muotoa $a_n = c^{kn + b}$, missä $c \neq 0$, on geometrinen jono.

398. Ilmaise geometrinen jono $15, -45, 135, \ldots$ lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$. Mikä jonon kymmenes jäsen on?

399. Piirretään ympyrä ja sen sisään sisäkkäisiä ympyröitä niin, että jokainen ympyrä sivuaa edellistä ympyrää ja kulkee sen keskipisteen kautta. Kuinka mones ympyrä on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin miljoonasosa ensimmäisen ympyrän pinta-alasta?



400. Kuinka moni geometrisen jonon $5,\ 1{,}01 \cdot 5,\ 1{,}01^2 \cdot 5, \ldots$ jäsenistä on pienempi kuin $1\,000$?

401. Geometrisen jonon (a_n) seitsemäs jäsen on 450 ja yhdestoista jäsen 50. Määritä jonon kaksi ensimmäistä jäsentä.

REKURSIIVINEN JONO

402. Riistaeläimien määrä alueella vuoden 2001 alussa oli $1\,300$ yksilöä. Eläinkanta lisääntyy joka vuosi $5\ \%$, mutta kasvua hidastetaan metsästämällä kannasta joka syksy 40 yksilöä.
a) Muodosta kannan kehitystä kuvaava lukujono.
b) Minkä vuoden alussa kannan suuruus ensimmäisen kerran ylittää $2\,000$ yksilöä?

403. Ilmaise jono
$a_1 = 3$ ja $a_n = 3na_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$,
lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$.

404. Viljo kertoo toukokuun 1. päivänä juorun yhdelle tuttavalle, joka kertoo sen seuraavana päivänä yhdelle ja sitä seuraavana päivänä kahdelle. Jokainen juorun kuullut toimii samalla tavalla eli kertoo huhun kuulemista seuraavana päivänä yhdelle juorusta tietämättömälle ja sitä seuraavana kahdelle.
a) Muodosta lukujono (a_n), jonka jäsen a_n on juorun kuulijoiden määrä toukokuun n. päivänä.
b) Kuinka moni kuulee juorun toukokuun 9. päivänä?

ARITMEETTINEN SUMMA

405. Laske aritmeettisen jonon $-1,\ 6,\ 13, \ldots$ kolmenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

406. Harjakaton alle rakennetun huoneen seinässä on vierekkäin 39 paneelilautaa, jotka pitenevät tasaisesti niin, että ensimmäisen laudan pituus on $1{,}32$ metriä ja viimeisen $3{,}45$ metriä. Kuinka monta metriä paneelilautaa seinässä on?

407. Nelinumeroisista positiivisista kokonaisluvuista valitaan suuruusjärjestyksessä joka kolmastoista alkaen luvusta 1002. Laske kaikkien valittujen lukujen summa.

408. Asuntolaina, jonka suuruus on $120\,000$ euroa, maksetaan takaisin 20 vuoden aikana niin, että aina puolivuosittain maksetaan yhtä suuri lyhennys. Samalla maksetaan lainan korko edellisen puolen vuoden ajalta. Lainalle on sovittu kiinteä korko $6{,}50\ \%$. Kuinka paljon rahaa kaikkiaan kuluu lainan lyhennyksiin ja korkoihin?

409. Palloiluhalliin on sijoitettu $6\,000$ istuinta viiteentoista pelikenttää kiertävään kehään niin, että seuraavassa kehässä on aina kahdeksan istuinta enemmän kuin edellisessä. Kuinka monta istuinta ensimmäisessä kehässä on?

410. Kuinka monta aritmeettisen jonon $1,\ 4,\ 7, \ldots$ jäsentä on laskettava yhteen, jotta summan arvo ylittäisi miljoonan?

GEOMETRINEN SUMMA

411. Laske geometrisen jonon $10,\ -30,\ \ldots$ kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa.

412. Laske.

a) $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{2^k}$ b) $\sum_{k=0}^{12} \frac{1}{2^{2k}}$

413. Veden happamoitumisen takia järvestä pyydettyjen kalojen määrä on joka vuosi vähentynyt 8 %. Vuoden 1997 kalansaalis oli 7 600 tonnia.

a) Mikä vuoden 2005 kalansaalis oli?

b) Kuinka paljon kalaa voidaan odottaa saatavan kaikkiaan vuosina 2005–2015?

414. Kuinka monta ensimmäistä jonon $1,\ 0{,}98,\ 0{,}98^2,\ \ldots$ jäsentä on laskettava yhteen, jotta summan arvo ylittäisi 49?

415. Maija tallettaa 40-vuotissyntymäpäivänään ja jokaisena seuraavana syntymäpäivänä aina 49-vuotissyntymäpäivään saakka 300 euroa tilille, jonka korko on 4,5 %. Kun Maija täyttää 50 vuotta, hän tyhjentää tilin ja lähtee maailmanympärimatkalle.

a) Kuinka paljon Maijalla on matkarahaa?

b) Kuinka suuri vuotuisen talletuksen tulee olla, jotta matkarahaa olisi 5 000 euroa?

Koron lähdeveroa ei oteta huomioon.

416. Epäsuotuisissa oloissa eräs eliöpopulaatio vähenee joka vuosi 20 %, mutta kantaan muuttaa joka vuoden lopussa 100 uutta jäsentä. Populaation suuruus ensimmäisen vuoden alussa oli 2 500. Olkoon a_n populaation suuruus n. vuoden alussa. Muodosta jonon (a_n) lauseke. Kuinka suuri populaatio on 20. vuonna?

TEHTÄVÄSARJOJA

Sarja A

1. Laske $f'(\frac{\pi}{4})$, kun $f(x) = \cos 2x - \sin^2 x$.

2. Luvut $2\sin^2 x \cos x$, $\sin x$ ja 1 tässä järjestyksessä ovat erään geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Määritä x.

3. Ensimmäisellä viikolla kioskiketjun kampanjatuotetta myytiin 600 kappaletta, minkä jälkeen mainonta alkoi purra ja myynti kasvoi joka viikko 100 kappaleella. Kuinka monennella viikolla maahan tuotu 80 000 tuotteen erä loppui?

4. Ilmaise jono (u_n), missä
$u_1 = 5$ ja $u_n = u_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}$, kun $n \geqslant 2$,
lausekkeen avulla muodossa $u_n = f(n)$.
Mikä jonon 15. jäsen on?

5. Määritä funktion $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x - 3$
a) nollakohdat b) suurin ja pienin arvo.

6. Osoita, että funktion $\sin x$ kuvaajalle muuttujan arvon a kohdalle piirretty tangentti kulkee origon kautta, jos ja vain jos $\tan a = a$. Määritä edelleen kolmen desimaalin tarkkuudella kaikki tällaiset kohdat väliltä $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$.

Sarja B

1. Jonon (a_n) ensimmäinen jäsen $a_1 = (a-b)^2$ ja kolmas jäsen $a_3 = (a+b)^2$, missä $|a| \neq |b|$. Mikä jonon toinen jäsen on, jos jono (a_n) on
a) aritmeettinen b) geometrinen?

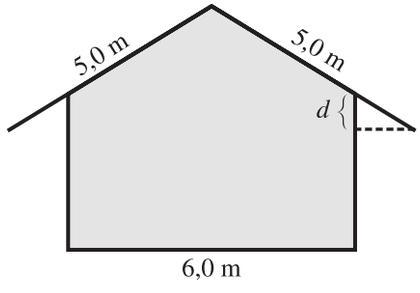
2. Määritä funktion $f(x) = x + \cos 4x$ derivaattafunktion suurin ja pienin arvo.

3. Lelua myytiin ensimmäisellä viikolla 300 kappaletta, minkä jälkeen televisiomainonta alkoi vaikuttaa niin, että lelua myytiin joka viikko 40 % enemmän kuin edellisellä viikolla. Kuinka monennella viikolla maahan tuotu 90 000 lelun erä loppui?

4. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x}$ suurin ja pienin arvo.

5. Kuinka monen luvun 3 ensimmäisen potenssin tulo $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots$ voidaan laskea uudella laskimella, joka näyttää laskun tuloksen niin kauan, kun tulos on pienempi kuin 10^{1000}?

6. Rakennus, jonka päädyn leveys on 6,0 metriä, katetaan symmetrisellä harjakatolla, jonka lappeiden leveys on 5,0 metriä. Ulkonäkösyistä halutaan, että katonlappeet ulottuvat mahdollisimman alas eli että kuvioon merkitty etäisyys d on mahdollisimman suuri. Kuinka suuri katonlappeiden kaltevuuskulman tulee olla? Anna vastaukseksi kaltevuuskulman suuruus asteina.



Sarja C

1. Määritä kertoimet a ja b niin, että funktiolle $f(x) = a\sin 2x + b\cos 4x$ pätee $f(\frac{\pi}{12}) = 0$ ja $f''(\frac{\pi}{12}) = 1$.

2. Luvut $\cos^2 x$, $-\cos x$ ja $\sin^2 x$ tässä järjestyksessä ovat erään aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Määritä x.

3. Osoita, että funktio $f(x) = \tan x + \sin x$ on aidosti kasvava välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

4. Määritä lukujonon $b_n = \frac{50 - n}{n^4}$ pienin jäsen.

5. Puumäärä metsäpalstalla vuoden 2000 alussa oli 1 400 m^3. Puumäärä lisääntyy joka vuosi vuosikasvun johdosta 5,0 %, ja joka syksy kasvukauden jälkeen puustosta hakataan 3,0 %. Laske vuosina 2000–2020 tehtävien hakkuiden yhteismäärä.

6. Kartan koordinaatiston origosta lähdetään koordinaatiston ensimmäiseen neljännekseen vaikeakulkuiseen metsään ja kuljetaan suoraan, kunnes tullaan pitkin suoraa $y = 3$ kulkevalle polulle. Loppumatka pisteeseen $(6, 3)$ kuljetaan pitkin polkua. Kulkunopeus polulla on kolminkertainen alkumatkaan verrattuna. Kuinka suuri lähtösuunnan ja positiivisen x-akselin välisen kulman tulee olla, jotta koko matka sujuisi mahdollisimman nopeasti? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

Sarja D

1. Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on 5 ja kymmenes jäsen 68. Laske jonon 20 ensimmäisen jäsenen summa.

2. Kulman 2α sini saadaan kulman α sinistä ja kosinista kaavalla $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Laske $\sin 2\alpha$, kun $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ja $90° < \alpha < 180°$.

3. Määritä funktion $f(x) = \cos 2x + x$ välillä $]0, 2\pi[$ olevat ääriarvokohdat.

4. Kun J. oli lopettanut tupakoinnin, hän ryhtyi tallettamaan vuodesta 2003 alkaen joka vuoden alussa vuotuiset tupakointikustannukset 2 000 euroa tilille, jonka korko on 5 %. Minkä vuoden lopussa tilillä on päättyvän vuoden korkojen lisäämisen jälkeen ensimmäisen kerran yli 30 000 euroa? Koron lähdeveroa ei oteta huomioon.

5. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 1,00 metriä. Määritä kolmion kantakulman suuruus niin, että kolmion kannan ja kannalle piirretyn korkeusjanan pituuksien summa on mahdollisimman suuri. Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

6. Geometrisen jonon kahden ensimmäisen jäsenen summa on 54 ja neljän ensimmäisen jäsenen summa 60. Määritä jonon kuuden ensimmäisen jäsenen summa.

Sarja E

1. Katkaistun pyramidin muotoisessa pilvenpiirtäjässä on 83 kerrosta. Jokaisessa kerroksessa on neljä ikkunaa vähemmän kuin edellisessä. Ylimmässä kerroksessa on 44 ikkunaa. Kuinka monta ikkunaa koko rakennuksessa on?

2. Määritä funktion $f(x) = \sin^2 3x$ kuvaajalle muuttujan arvon $\frac{\pi}{4}$ kohdalle piirretyn tangentin ja normaalin yhtälö.

3. Kuinka monta nollakohtaa funktiolla

a) $1 - \cos x$ b) $1 - \cos x^2$

on välillä $[100, 200]$?

4. Määritä funktion $f(x) = \cos x + \sin x \cos x$ suurin ja pienin arvo.

5. Jonossa $1,\ 2q,\ 3q^2,\ 4q^3, \ldots$ kertoimet ja kantaluvun q eksponentit kasvavat aina yhdellä. Muodosta kaava, jolla voidaan laskea jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa, kun $q \neq 1$. Laske jonon 29 ensimmäisen jäsenen summa, kun $q = -2$.

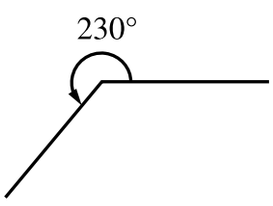
6. Laske välin $]0, 1[$ kaikkien sellaisten rationaalilukujen summa, joiden supistetun murtolukumuodon nimittäjä on jokin luvun 2 potenssi 2^n, missä kokonaisluku n on välillä $1 \leqslant n \leqslant 20$.

Vastaukset

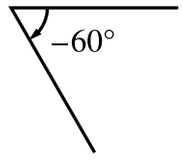
Suunnatun kulman kosini ja sini

1.

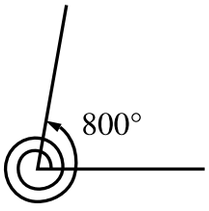
a)



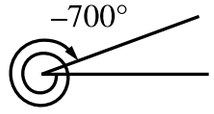
b)



c)



d)



2. $\alpha = -90°$, $\beta = 630°$, $\gamma = 135°$, $\delta = -225°$

3. a) $-0{,}5$ ja $0{,}9$
b) $-0{,}9$ ja $-0{,}5$
c) $-0{,}5$ ja $0{,}9$
(Kulmalla $1920°$ on sama kehäpiste kuin kulmalla $120°$.)

4. a) $\cos 90° = 0$ ja $\sin 90° = 1$
b) $\cos 360° = 1$ ja $\sin 360° = 0$
c) $\cos(-180°) = -1$ ja $\sin(-180°) = 0$
d) $\cos 630° = 0$ ja $\sin 630° = -1$

5. a) epänegatiivisia kulmia
$0°$, $180°$, $360°$, $540°$ jne.
negatiivisia kulmia $-180°$, $-360°$, $-540°$ jne.
b) epänegatiivisia kulmia $0°$, $360°$, $720°$ jne.
negatiivisia kulmia $-360°$, $-720°$ jne.
c) positiivisia kulmia $270°$, $630°$, $990°$ jne.
negatiivisia kulmia $-90°$, $-450°$, $-810°$ jne.

6. a) -2
$(\sin(3 \cdot 90°) + \cos(2 \cdot 90°)$
$= \sin 270° + \cos 180° = -1 - 1 = -2)$
b) 0

7. a) $-0{,}24$ ja $-0{,}97$
b) $1{,}99$ ja $-0{,}24$

8. a)

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$135°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$225°$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$315°$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Kulmien $45°$, $135°$, $225°$ ja $315°$ sinin ja kosinin tarkat arvot ovat myös taulukkokirjassa.

b) $\sin(-225°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(-225°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin 2115° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 2115° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(Kulmalla $-225°$ on sama kehäpiste kuin kulmalla $135°$, ja kulmalla $2115°$ on sama kehäpiste kuin kulmalla $315°$.)

9. a) $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$(\sin(3 \cdot 45°) + 3\cos 45°$
$= \sin 135° + 3\cos 45°$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})$

b) $-\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

10. a) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ b) $-\sqrt{2}$

11. positiivisia $400°$, $760°$, $1\,120°$ jne.,
negatiivisia $-320°$, $-680°$, $-1\,040°$ jne.

12. a) $65°$, $\cos 425° \approx 0{,}4$ ja $\sin 425° \approx 0{,}9$
b) $140°$, $\cos(-580°) \approx -0{,}8$ ja
$\sin(-580°) \approx 0{,}6$

13. a) positiivisia $90°$, $450°$, $810°$, …
negatiivisia $-270°$, $-630°$, $-990°$, …
b) positiivisia $90°$, $270°$, $450°$, $630°$, …
negatiivisia $-90°$, $-270°$, $-450°$, $-630°$, …
c) positiivisia $180°$, $540°$, $900°$, …
negatiivisia $-180°$, $-540°$, $-900°$, …

14. a) 1 b) 1

15. Toisen kateetin pituus on kannan puolikas $\frac{1}{2}$.

Toisen kateetin pituus saadaan Pythagoraan lauseella.
a)

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$240°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$300°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

b)

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Kaikki a- ja b-kohtien taulukoiden tarkat arvot ovat taulukkokirjoissa.

16. a) $\sin 570° = -\frac{1}{2}$, $\cos 570° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin(-300°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-300°) = \frac{1}{2}$

17. a) 2 b) $-\sqrt{3} - 1$

18. a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 3)$

b) $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} + 3)$

Kosinin ja sinin ominaisuuksia

19. a) kolmannessa neljänneksessä,
kosini negatiivinen ja sini negatiivinen
b) neljännessä neljänneksessä,
kosini positiivinen ja sini negatiivinen
c) neljännessä neljänneksessä,
kosini positiivinen ja sini negatiivinen
d) kolmannessa neljänneksessä,
kosini negatiivinen ja sini negatiivinen

20. a) $\alpha = n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = n \cdot 180°$, n kokonaisluku
c) Mikään kulma ei toteuta yhtälöä.

21. $\alpha = n \cdot 90°$, n kokonaisluku
(Tulon nollasäännön nojalla yhtälö toteutuu, kun $\sin\alpha = 0$ tai $\cos\alpha = 0$.)

22. a) $[-2, 2]$ b) $[-2, 2]$
c) $[1, 5]$ d) $[3, 7]$

23. $2 \leqslant a \leqslant 4$
(Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $\sin\alpha = a - 3$ kanssa. Koska funktion $\sin\alpha$ arvojoukko on $[-1, 1]$, yhtälöllä on juuria, kun $-1 \leqslant a - 3 \leqslant 1$.)

24. a) $-\frac{40}{41}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

25. a) -2 b) $\frac{9}{8}$

26. a) $\sin 90° = \sin(2 \cdot 45°) = 2 \sin 45° \cos 45°$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$\sin 270° = \sin(2 \cdot 135°) = 2 \sin 135° \cos 135°$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

b) $\frac{120}{169}$ tai $-\frac{120}{169}$

$\left(\cos\alpha = \frac{5}{13}\right.$ tai $\left.\cos\alpha = -\frac{5}{13}\right)$

c) $-\frac{24}{25}$ $\quad\left(\cos\alpha = -\frac{4}{5}\right)$

d) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

27. Pinta-alan trigonometrisella kaavalla saadaan $A = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

Molempien suorakulmaisten kolmioiden pinta-ala on $\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$, eli $A = \sin\alpha\cos\alpha$.

28. a) neljännessä neljänneksessä,
kosini positiivinen ja sini negatiivinen
b) neljännessä neljänneksessä,
kosini positiivinen ja sini negatiivinen
c) toisessa neljänneksessä,
kosini negatiivinen ja sini positiivinen
d) ensimmäisessä neljänneksessä,
kosini positiivinen ja sini positiivinen

29. a) $\alpha = 180° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = 270° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
c) Ei ratkaisua.

30. a) $\alpha = 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = n \cdot 180°$, n kokonaisluku

31. a) $[0, 1]$ b) $[1, 4]$

32. a) suurin arvo 5 ja pienin arvo -5
b) suurin arvo 12 ja pienin arvo 2
c) suurin arvo 8 ja pienin arvo -2

33. $0 \leqslant a \leqslant 2$

34. a) $-\frac{20}{29}$ b) $\frac{\sqrt{55}}{8}$

35. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}$

36. a) $\sin\alpha$ b) $-2\sin\alpha\cos\alpha + 1$

37. a) ensimmäinen muoto:
$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60°$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

toinen muoto:
$\cos 120° = 2\cos^2 60° - 1$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

kolmas muoto:
$\cos 120° = 1 - 2\sin^2 60°$

$$= 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

b) $-\frac{1}{9}$

c) $\frac{7}{15}$

38. a) $\cos 15° = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3} + 2}$ ja

$\cos 165° = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3} + 2}$

b) $\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ja

$\sin 165° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

39. a) Kosinilauseella laskettu kannan pituuden neliö on $2 - 2\cos 2\alpha$. Suorakulmaisten kolmioiden avulla laskettu kannan pituus on $2\sin\alpha$ ja pituuden neliö $4\sin^2\alpha$. Siis
$2 - 2\cos 2\alpha = 4\sin^2\alpha$.
b) Sijoitetaan $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.
c) Sijoitetaan $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.

40. a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

c) $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{21}{221}$, $\cos(\alpha-\beta) = -\dfrac{140}{221}$

41. a) $\overline{OA} = \cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j}$,
$\overline{OB} = \cos\beta\,\bar{i} + \sin\beta\,\bar{j}$

b) $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\overline{OA}, \overline{OB}) = \dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{|\overline{OA}||\overline{OB}|}$

Kulman ratkaiseminen

42. a) esimerkiksi $105°$
b) esimerkiksi $-75°$
c) esimerkiksi $-110°$
d) esimerkiksi $70°$

43. a) $\alpha \approx 61° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx -61° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha \approx 22° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 158° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
c) $\alpha \approx -33° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 213° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

44. a) $\alpha = 50° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = 130° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = 75° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -75° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

45. a) $30° + n \cdot 360°$ ja $-30° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $45° + n \cdot 360°$ ja $135° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

46. $\alpha = 19° + n \cdot 90°$ tai $\alpha = -19° + n \cdot 90°$, n kokonaisluku
($4\alpha \approx 76{,}11° + n \cdot 360°$ tai
$4\alpha \approx -76{,}11° + n \cdot 360°$)
Välillä $[0°, 270°]$ ovat kulmat
$19°$, $71°$, $109°$, $161°$, $199°$ ja $251°$.

47. a) $\alpha = 60° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -60° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku (Yhtälö $\cos\alpha = 0{,}5$.)
b) Ei juuria.

48. $\alpha = -10° + n \cdot 120°$ tai $\alpha = 70° + n \cdot 120°$, n kokonaisluku
(Yhtälö $\sin 3\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Yksi kulma, jonka sini on $-\dfrac{1}{2}$, on $210°$. Yhtälö toteutuu, kun
$3\alpha = 210° + n \cdot 360°$ tai
$3\alpha = 180° - 210° + n \cdot 360°$.)

49. $\alpha = n \cdot 180°$ tai $\alpha = 60° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -60° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
(Erottamalla yhteinen tekijä $\sin\alpha$ saadaan yhtälö $\sin\alpha\,(2\cos\alpha - 1) = 0$. Yhtälö toteutuu, kun $\sin\alpha = 0$ tai $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.)

50. $\alpha = n \cdot 180°$ tai $\alpha = 45° + n \cdot 90°$, n kokonaisluku
($3\alpha = \alpha + n \cdot 360°$ tai $3\alpha = 180° - \alpha + n \cdot 360°$)

51. $\alpha = n \cdot 60°$, n kokonaisluku
Välillä $[-180°, 180°]$ ovat juuret
$-180°$, $-120°$, $-60°$, $0°$, $60°$, $120°$ ja $180°$.
(Ratkaisuparviksi saadaan $\alpha = n \cdot 180°$ ja $\alpha = n \cdot 60°$. Ensimmäinen parvi sisältyy jälkimmäiseen.)

52. $\alpha = 75° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
($\alpha + 30° = \alpha + n \cdot 360°$ tai
$\alpha + 30° = 180° - \alpha + n \cdot 360°$)

53. a) $\beta = 180° - \alpha + n \cdot 360°$,
missä n on kokonaisluku
b) $\beta = -\alpha + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

54. a) $\alpha \approx 12° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 168° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha \approx 109° + n \cdot 360°$ tai
$\alpha \approx -109° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

55. $150° + n \cdot 360°$ ja $-150° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

56. kulmilla $110° + n \cdot 360°$ ja $70° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
Välillä $[-360°, 360°]$ ovat kulmat
$-290°$, $-250°$, $70°$ ja $110°$.

57. a) $\alpha = 90° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = 45° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
c) $\alpha = 30° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = 150° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

58. a) $\alpha = 540° + n \cdot 1080°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = 360° + n \cdot 2160°$ tai
$\alpha = -360° + n \cdot 2160°$, n kokonaisluku

59. $-54°$, $-36°$, $6°$, $24°$, $66°$ ja $84°$

60. a) $\alpha = n \cdot 180°$ tai $\alpha = 30° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = 150° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
(Yhtälöön $\sin\alpha\,(2\sin\alpha - 1) = 0$ sovelletaan tulon nollasääntöä.)
b) $\alpha = 30° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -30° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = 150° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -150° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
(Yhtälö toteutuu, kun $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tai $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

61. a) $\alpha = n \cdot 180°$ tai $\alpha = 22{,}5° + n \cdot 45°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = n \cdot 90°$, n kokonaisluku
(Ratkaisuparviksi saadaan $\alpha = n \cdot 180°$ ja $\alpha = n \cdot 90°$. Ensimmäinen parvi sisältyy jälkimmäiseen.)

62. $\alpha = -20° + n \cdot 180°$ tai $\alpha = -10° + n \cdot 90°$, n kokonaisluku

63. a) $12 + 10\sin(t \cdot 12°)$
b) Aina 2 sekunnin ja 13 sekunnin kuluttua hetkestä, jona istuin ylöspäin mennessään on ollut keskipisteen tasalla.

64. a) $\beta = -\alpha + n \cdot 360°$ tai
$\beta = 180° + \alpha + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\beta = 180° - \alpha + n \cdot 360°$ tai
$\beta = \alpha - 180° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

65. a) $\alpha = n \cdot 120°$ tai $\alpha = 180° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
(Yhtälö $\sin 2\alpha = \sin(-\alpha)$.)
b) $\alpha = 60° + n \cdot 120°$ tai $\alpha = -180° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
(Yhtälö $\cos 2\alpha = \cos(180° - \alpha)$.)

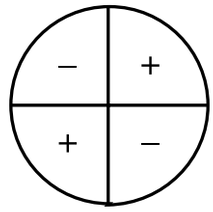
66. a) $\alpha = 45° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -27° + n \cdot 72°$, n kokonaisluku
(Yhtälö $\sin(45° - 3\alpha) = \sin(-2\alpha)$.)
b) $\alpha = 105° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
(Yhtälö $\cos(30° - \alpha) = \cos(180° - \alpha)$.)

Tangentti

67. $-\frac{8}{15}$

68. a) $-305°$, $-125°$, $55°$, $235°$
b) $-220°$, $-40°$, $140°$, $320°$

69.



70. kulmat $n \cdot 180°$, n kokonaisluku

71.

α	$\tan\alpha$
$45°$	1
$135°$	-1
$225°$	1
$315°$	-1

Taulukossa olevat tarkat arvot ovat taulukkokirjoissa.

72. a) $45° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) $135° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

73. a) $\alpha \approx 32° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) $\alpha \approx -59° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
c) $\alpha \approx -21° + n \cdot 45°$, n kokonaisluku

74. a) $\alpha \approx 26{,}6° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
($\tan\alpha = \frac{1}{2}$)

b) $\alpha \approx -53{,}1° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
($\tan\alpha = -\frac{4}{3}$)

75. a) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$ ja $\cos\alpha = \frac{20}{29}$

b) $\sin\alpha = -\frac{21}{29}$ ja $\cos\alpha = -\frac{20}{29}$

(Sinin ja kosinin itseisarvot saadaan suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateettien pituudet ovat 21 ja 20.)

76. $\cos\alpha = -\frac{35}{37}$ ja $\tan\alpha = -\frac{12}{35}$

(Voidaan määrittää ensin $\cos\alpha$ trigonometristen funktioiden Pythagoraan lauseella ja sen jälkeen määrittää $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Voidaan myös määrittää $\cos\alpha$:n ja $\tan\alpha$:n itseisarvot suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusa on 37 ja toinen kateetti 12.)

77. $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ja $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$
($\tan\alpha = -3$)

78. $\alpha = -20° + n \cdot 90°$, n kokonaisluku
Välillä $[0°, 360°]$ ovat juuret
$70°$, $160°$, $250°$ ja $340°$.

79. a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ ($\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha$)

80. a)

α	$\tan\alpha$
$60°$	$\sqrt{3}$
$120°$	$-\sqrt{3}$
$240°$	$\sqrt{3}$
$300°$	$-\sqrt{3}$

b)

α	$\tan\alpha$
$30°$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$150°$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$210°$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$330°$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Tarkat arvot ovat myös taulukkokirjoissa.

81. a) $\alpha = 30° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = 120° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

82. $\alpha = 30° + n \cdot 180°$ tai $\alpha = 150° + n \cdot 180°$

83. a) $\alpha \approx 82° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) $\alpha \approx -39° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

84. $\alpha \approx 34° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

85. a) $\alpha = 45° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = -45° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

86. a) $\alpha = 45° + n \cdot 90°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = 30° + n \cdot 90°$, n kokonaisluku

87. $-39°$, $21°$ ja $81°$

88. $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

89. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

90. $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$ ja $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}}$ tai

$\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{29}}$ ja $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$(\tan\alpha = -\frac{2}{5})$

91. a) määrittelyehto $\alpha \neq 45° + n \cdot 90°$ ja $\alpha \neq n \cdot 180°$, n kokonaisluku, yhtälön ratkaisu $\alpha = 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) määrittelyehto $\alpha \neq 45° + n \cdot 90°$ ja $\alpha \neq n \cdot 180°$, n kokonaisluku,
yhtälön ratkaisu $\alpha = 30° + n \cdot 60°$,
n kokonaisluku
(Riittää, kun tutkitaan, että välillä $[0, 360°]$ olevat juuret täyttävät määrittelyehdon.)

92. Funktio $\sec\alpha$ on määritelty, kun $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.
Funktio $\csc\alpha$ on määritelty, kun $\alpha \neq n \cdot 180°$, n kokonaisluku.
a) $1 + \tan^2\alpha$

$= 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \ldots$

b) Kaava seuraa a-kohdan kaavasta, sillä $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
c) $\sec^2\alpha + \csc^2\alpha$

$= \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \sin^2\alpha} = \ldots$

93. a) $\alpha = n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) Olkoon A kulman α kehäpiste, C kulman α kotangenttipiste, $P = (0, \sin\alpha)$ ja $Q = (0, 1)$. Tällöin $PA = \cos\alpha$, $OP = -\sin\alpha$ ja $QC = -\cot\alpha$. Käytetään hyväksi kolmioiden OQC ja OPA yhdenmuotoisuutta.

94. a) $\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. Osoittaja ja nimittäjä jaetaan lausekkeella $\cos^2\alpha$.
b) $\tan 22{,}5° = -1 + \sqrt{2}$ ja
$\tan 112{,}5° = -1 - \sqrt{2}$
(Merkitään kysyttyä tangenttia esimerkiksi kirjaimella t, jolloin saadaan yhtälö $1 = \frac{2t}{1 - t^2}$.)

Radiaani

95. a) $44°$ b) $-170°$ c) $688°$

96. a) $-540°$ b) $60°$
c) $-120°$ d) $135°$

97. a) 0,152 b) −4,17 c) 21,17

98. a) $\frac{3\pi}{2}$ b) -4π
c) $\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{5\pi}{4}$

99. a) $\sin 5 \approx -0{,}959$
b) $\sin(-3{,}6) \approx 0{,}443$
c) $\sin(-3{,}6°) \approx -0{,}063$

100. a) $x = n \cdot \pi$, n kokonaisluku
b) $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku
c) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

101. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$

102. $\frac{1}{6}$

103. a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{4}$

104. $\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ ja $\tan x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

105. a) $x = \pi + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
b) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = \pi + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
(Yhtälöön $\cos x(\cos x + 1) = 0$ sovelletaan tulon nollasääntöä.)
c) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
(Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $\cos^2 x - \cos x = 0$ eli yhtälön $\cos x(\cos x - 1) = 0$ kanssa.)

106. $\frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, välillä $[0, 2\pi]$ ovat juuret

$\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$ ja $\frac{11\pi}{6}$

107. Piirretään $57{,}3°$:n suuruinen kulma.

108. a) $-43°$ b) $6\,820°$

109. a) $150°$ b) $-300°$ c) $315°$

110. $x = 2{,}2$, $y = -5{,}1$

111. a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{9\pi}{2}$ c) $-\frac{5\pi}{4}$

112. a) II neljänneksessä
b) II neljänneksessä
c) I neljänneksessä
d) III neljänneksessä
e) IV neljänneksessä

113. a) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku

b) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku

c) $x = \pi + n \cdot 2\pi$

114. a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

115. a) $\sqrt{3} - 2$ b) $1 - 2\sqrt{3}$

116. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

117. a) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku

b) $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku

118. a) $x = n \cdot \pi$, n kokonaisluku

b) $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku

119. $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, n kokonaisluku

Välillä $[0, 2\pi]$ ovat juuret $\frac{\pi}{3}$, π ja $\frac{5\pi}{3}$.

120. a) $b = \frac{u}{2\pi} \cdot 2\pi r = ur$

b) $A = \frac{u}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} ur^2$

c) kaaren pituus 8,0 m,
sektorin pinta-ala 23 m^2

121. Jos A on kulman x kehäpiste, niin pisteitä $(1, 0)$ ja A yhdistävän kaaren pituus on x. $\sin x$ on pisteen A lyhin etäisyys x-akselista, joten $\sin x < x$.

Trigonometriset funktiot

122. a) jakso $\frac{\pi}{2}$, arvojoukko $[-1, 1]$

b) jakso 2π, arvojoukko $[-3, 3]$
c) jakso 4π, arvojoukko $[-5, 5]$
(Tehtävät voi tarkistaa graafisella laskimella piirretystä kuvaajasta.)

123. a) suurin arvo 4 ja pienin arvo -4, suurin arvo kohdissa $x = n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku, ja pienin arvo kohdissa $x = \pi + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
b) suurin arvo 11 ja pienin arvo 3, suurin arvo kohdissa $x = \pi + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku, ja pienin arvo kohdissa $x = n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Funktio saa suurimman arvon kohdissa, joissa $\cos x = -1$, ja pienimmän arvon kohdissa, joissa $\cos x = 1$.)

124. a) $x \approx 0{,}79 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 2{,}35 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Tehtävän voi tarkistaa piirtämällä samaan laskimen näyttöön funktion $\sin x$ kuvaajan ja suoran $y = 0{,}71$.)
b) $x \approx 2{,}25 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -2{,}25 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
c) $x \approx 1{,}31 + n \cdot \pi$, n kokonaisluku

125. a) $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku

b) $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku

126. a) $x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku

b) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{3}$, n kokonaisluku

127. $x \approx 0{,}22 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x \approx 0{,}82 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$,
n kokonaisluku
Välillä $[0, 2\pi]$ on kuusi juurta.

128. $x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 10\pi$ tai $x = -\frac{5\pi}{3} + n \cdot 10\pi$,
n kokonaisluku

129. $x \approx 0{,}197 + n \cdot \pi$, n kokonaisluku
(Yhtälö $5 \sin x = \cos x$ toteutuu, kun
$\tan x = \frac{1}{5}$. Tehtävän voi tarkistaa piirtämällä
funktioiden $5 \sin x$ ja $\cos x$ kuvaajat samaan
graafisen laskimen näyttöön.)

130. $x = \frac{11\pi}{12} + n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$,
n kokonaisluku

131. $x = n \cdot \frac{2\pi}{5}$, n kokonaisluku
Välillä $[0, 2\pi]$ ovat muuttujan arvot
0, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$ ja 2π.
(Yhtälö $\cos 3x = \cos 2x$ toteutuu, kun
$3x = 2x + n \cdot 2\pi$ tai $3x = -2x + n \cdot 2\pi$.
Ensimmäisen yhtälön ratkaisuparvi $x = n \cdot 2\pi$
sisältyy jälkimmäisen yhtälön ratkaisuparveen.)

132. $x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai
$x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Yhtälö $2 \sin x \cos x = \sin x$ on yhtäpitävä
yhtälön $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$ eli yhtälön
$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$ kanssa.)

133. a) $x = n \cdot \pi$, n kokonaisluku
($\cos x = 1$ tai $\cos x = -1$)

b) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku
($\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$)

c) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku
($\tan^2 x = 1$ eli $\tan x = 1$ tai $\tan x = -1$.
Voidaan myös sijoittaa $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$,
jolloin saadaan yhtälö $2 \cos^2 x = 1$ eli
$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.)

134. $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
(Toisen asteen yhtälöstä saadaan
$\sin x = 3$ tai $\sin x = \frac{1}{2}$.)

135. a) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ tai $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai
$x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Sijoittamalla $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ saadaan
yhtälö $-2 \cos^2 x + \cos x = 0$.)

b) $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai
$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Sijoittamalla $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ saadaan
yhtälö $-2 \sin^2 x + 1 = \sin x$ eli
$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.
Yhtälö toteutuu, kun $\sin x = -1$ tai $\sin x = \frac{1}{2}$.)

136. a) jakso 2π, arvojoukko $[-6, 6]$
b) jakso 4π, arvojoukko $[-1, 1]$
c) jakso $\frac{2\pi}{3}$, arvojoukko $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

137. a) suurin arvo 3 ja pienin arvo -3, suurin arvo kohdissa $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, n kokonaisluku, ja pienin arvo kohdissa $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, n kokonaisluku
b) suurin arvo 7 ja pienin arvo 1, suurin arvo kohdissa $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, n kokonaisluku, ja pienin arvo kohdissa $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, n kokonaisluku

138. suurin arvo 5 ja pienin arvo 2

139. a) $x \approx -1{,}02 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 4{,}16 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
b) $x \approx 0{,}32 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -0{,}32 + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
c) $x \approx -1{,}13 + n \cdot \pi$, n kokonaisluku

140. a) $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
b) $x = n \cdot \pi$, n kokonaisluku

141. 3,45, 4,40, 5,02 ja 5,98

142. $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, n kokonaisluku

143. $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

144. $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku
$(\tan x = \sqrt{3}$ tai $\tan x = -\sqrt{3})$

145. a) $x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
b) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

146. a) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
b) $x = \pi + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

147. a) $a = 6$ tai $a = -6$, $b = -2$ ja $k = \pi$
b) Kun $a = 6$, $t = \frac{1}{6} + 2n$ tai $t = \frac{5}{6} + 2n$, n kokonaisluku.
Kun $a = -6$, $t = \frac{7}{6} + 2n$ tai $t = \frac{1}{6} + 2n$, n kokonaisluku.

148. a) 12 tuntia
b) 5,2 metrin ja 7,8 metrin välillä
c) Aina 3,8:n ja 8,2:n tunnin kuluttua siitä, kun vesi on korkeimmillaan.

149. a) $1{,}5 \cos \frac{\pi}{6} t + 3{,}1$
b) $1{,}5 \sin \frac{\pi}{6} t + 3{,}1$

150. a) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku
b) Ei juuria.

151. $x = \frac{1}{n\pi}$, n kokonaisluku ja $n \neq 0$.
Välillä $[\frac{1}{1000}, \frac{1}{100}]$ on 287 juurta.

Trigonometristen funktioiden derivaatat

152. a) $5\cos x$

b) $3\sin^2 x\cos x$ $(\mathrm{D}f(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x))$

c) $-2\sin x + 2\cos x\sin x$

153. a) $\cos^2 x - \sin^2 x$ $(\mathrm{D}(fg) = f'g + fg')$

b) $2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$

154. $\mathrm{D}\cot x = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$

$(\mathrm{D}\dfrac{f}{g} = \dfrac{f'g - fg'}{g^2})$

155. 3 (Tangentin kulmakerroin on derivaattafunktion $f'(x)$ arvo $f'(\frac{\pi}{6})$.)

156. a) $-4\sin 4x$

b) $-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{6}$

c) $-3\cos(\frac{\pi}{4} - 3x)$

157. -3

$(f'(x) = -2\sin 2x - 2\sin x\cos x,$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -2\cdot 1 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})$

158. tangentti $y = -3x + \pi$, normaali $y = \frac{1}{3}x - \frac{\pi}{9}$

159. kohdat $\frac{\pi}{6} + n\cdot\pi$ ja $-\frac{\pi}{6} + n\cdot\pi$,

n kokonaisluku

$(g'(x) = 1 - 2\cos 2x)$

160. Tutkitaan derivaattafunktiota $f'(x) = x^2 + 1 + \sin x$. Koska $\sin x \geqslant -1$ kaikilla x, niin $f'(x) \geqslant x^2$ kaikilla x. Siis $f'(x) > 0$, kun $x \neq 0$. Koska $f'(0) = 1$, on $f'(x) > 0$ kaikilla x, joten f on aidosti kasvava.

161. Tutkitaan erotusfunktiota $f(x) = x - \sin x$ välillä $[0, \infty[$. Koska $\cos x \leqslant 1$, niin $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ kaikilla x, ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä kohdissa $n\cdot 2\pi$, n kokonaisluku. Siis funktio f on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Koska $f(0) = 0$, niin $f(x) > 0$, kun $x > 0$.

162. suurin arvo $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ja pienin arvo $f(\pi) = -1$

(Funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvon välin päätepisteessä tai välin sisällä olevassa derivaattafunktion nollakohdassa. Välillä $]0, \pi[$ on derivaattafunktion $f'(x) = x\cos x$ nollakohta $\frac{\pi}{2}$.)

163. $\sqrt{3}$

(Derivaattafunktiolla $f'(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\sin x - 1}{\cos^2 x}$ on välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ nollakohta $\frac{\pi}{6}$. Derivaattafunktion merkkien (kulkukaavion) avulla perustellaan, että funktio saa kohdassa $\frac{\pi}{6}$ pienimmän arvon.)

164. a) välillä 3,5 m – 8,5 m

(Funktion $\sin\frac{\pi}{6}t$ pienin arvo on -1 ja suurin arvo 1.)

b) 12 tuntia $(12\cdot\frac{\pi}{6} = 2\pi)$

c) 8,2 m ja 4,8 m

d) Laskee nopeudella 0,65 m/h ja nousee nopeudella 1,1 m/h.
(Lasketaan $h'(4)$ ja $h'(11)$, missä $h'(t) = 2{,}5\cdot\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t$.)

165. -4

166. a) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ b) $-\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$

167. $\mathrm{D}\dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$

$= \dfrac{\cos x(\cos x + 1) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x + 1)^2}$

$= \dfrac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x}{(\cos x + 1)^2}$

168. Funktio g on määritelty jokaisella välillä $]-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi[$, missä n on kokonaisluku. $g'(x) = -\tan x$.
(Funktio $\ln f(x)$ on määritelty, kun $f(x) > 0$, ja $\mathrm{D} \ln f(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.)

169. a) $e^{\sin x} \cos x$

b) $2e^{\sin^2 x} \sin x \cos x$

170. a) $-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$

b) $6 \sin 3x \cos 3x$

171. tangentti $y = 7x + 5$, normaali $y = -\frac{1}{7}x + 5$

172. $a = \frac{5}{3}$, $b = \frac{2}{3}$

173. yksi, noin 0,74
(Erotusfunktio $f(x) = x - \cos x$ on kaikkialla aidosti kasvava, joten juuria on korkeintaan yksi. Koska arvot $f(0) = -1$ ja $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ovat erimerkkiset, juuria on yksi. Likiarvo määritetään haarukoimalla.)

174. Erotusfunktion $f(x) = \tan x - x$ derivaattafunktio $f'(x) = \tan^2 x$ on positiivinen välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$, joten funktio f on aidosti kasvava välillä $[0, \frac{\pi}{2}[$. Koska $f(0) = 0$, niin $f(x) > 0$ välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.

175. suurin arvo $f(0) = 1$, pienin arvo $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} - 3$
(Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on derivaattafunktion $f'(x) = (4x - 6)\cos 2x$ nollakohdat $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{3}{2}$.)

176. minimikohta $\frac{\pi}{3}$ ja minimiarvo $-3\sqrt{3}$,
maksimikohta $-\frac{\pi}{3}$ ja maksimiarvo $3\sqrt{3}$
(Derivaattafunktion $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 8\cos x = \dfrac{1 - 8\cos^3 x}{\cos^2 x}$ arvo on nolla, kun $\cos^3 x = \frac{1}{8}$. Ääriarvot perustellaan kulkukaavion avulla.)

177. Tangentin yhtälö on $y - \sin a = \cos a\,(x - a)$, missä $a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$. Tangentti leikkaa x-akselin kohdassa $a - \dfrac{\sin a}{\cos a} = a - \tan a$, joten kyseisen janan pituus on $|\tan a|$.

178. Veden syvyyden ilmaisee funktio
$h(t) = 2 \sin \frac{\pi}{6} t + 8$.

a) Nousee nopeudella 0,91 m/h.
b) Laskee nopeudella 1,0 m/h.

179. a) Erotusfunktion $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ toisen derivaattafunktion $f''(x)$ avulla nähdään, että derivaattafunktio $f'(x)$ on kaikkialla aidosti kasvava. Koska $f'(0) = 0$, niin $f'(x) < 0$, kun $x < 0$, ja $f'(x) > 0$, kun $x > 0$. Siis funktio f on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 0]$ ja aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Koska $f(0) = 0$, väite seuraa.
Yhtäsuuruus pätee vain muuttujan arvolla 0.

b) Erotusfunktion $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ derivaattafunktio $g'(x)$ on a-kohdan erotusfunktio $f(x)$. a-kohdassa osoitettiin, että funktio $g' = f$ on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$ ja että $f(0) = 0$. Siis $g'(x) > 0$ välillä $]0, \infty[$, joten g on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$.
Koska $g(0) = 0$, väite seuraa.

180. $\mathrm{D} \sin \alpha = \frac{\pi}{180} \cos \alpha$, $\mathrm{D} \cos \alpha = -\frac{\pi}{180} \sin \alpha$

a) $\frac{\pi}{180}$ b) $-\frac{\pi}{360}$

(Olkoot $f(\alpha)$ ja $g(\alpha)$ sini- ja kosinifunktio, joissa muuttuja on asteissa, ja vastaavasti $u(x)$ ja $v(x)$ sini- ja kosinifunktio, joissa muuttuja on radiaaneissa. Silloin $f(\alpha) = u(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha)$ ja $g(\alpha) = v(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha)$. Sovelletaan yhdistetyn funktion derivointisääntöä sekä derivointikaavoja $u' = v$ ja $v' = -u$.)

181. d) Määritellään $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

Trigonometristen funktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja

182. suurin arvo 3 ja pienin arvo -1
(Koska funktio f on jaksollinen jaksona 2π, niin riittää, kun määritetään funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2\pi]$.
Derivaattafunktiolla
$f'(x) = -2 \sin x - 2 \sin x \cos x$
$= -2 \sin x (1 + \cos x)$
on välillä $]0, 2\pi[$ nollakohta π.
Toinen tapa on merkitä $\cos x = t$ ja määrittää funktion $u(t) = 2t + t^2$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.)

183. pienin arvo -2, suurin arvo 3
(Funktio f on jaksollinen jaksona 2π, joten riittää, kun määritetään suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$.
Derivaattafunktion
$f'(x) = 6 \sin^2 x \cos x - 6 \sin x \cos x$
$= 6 \sin x \cos x (\sin x - 1)$
välillä $]0, 2\pi[$ olevat nollakohdat ovat
$\frac{\pi}{2}$, π ja $\frac{3\pi}{2}$.

Toinen tapa on sijoittaa $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, jolloin $f(x) = 2 \sin^3 x + 3(1 - \sin^2 x)$, merkitä $\sin x = t$ ja määrittää funktion $g(t) = 2t^3 + 3(1 - t^2)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.)

184. suurin arvo 15 kohdissa $x = \pi + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku,
pienin arvo 9 kohdissa $x = n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

185. suurin arvo $\sqrt{2}$ kohdissa $\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
pienin arvo $-\sqrt{2}$ kohdissa $\frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Tutkitaan funktiota f ensin välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktion $f'(x) = \cos x - \sin x$ nollakohdat saadaan yhtälöstä $\tan x = 1$, joten välillä $]0, 2\pi[$ ovat nollakohdat $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{5\pi}{4}$.)

186. $A(x) = \sin x \cos x$, missä x on suljetulla välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pinta-ala on suurin, kun kantakulma on $\frac{\pi}{4}$ eli $45°$.

(Derivaattafunktion $A'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ arvo on 0, kun $\tan^2 x = 1$.
Voidaan myös kirjoittaa
$A'(x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$,
jolloin saadaan yhtälö $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on derivaattafunktion nollakohta $\frac{\pi}{4}$.)

187. halkaisijalla oleva sivu $\sqrt{2}$,
kohtisuora sivu $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(Suorakulmion pinta-ala on
$A(x) = 2 \sin x \cos x$, missä x on välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Derivaattafunktio on
$A'(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$. Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on derivaattafunktion nollakohta $\frac{\pi}{4}$.
Sama ongelma oli tehtävässä 92 kurssissa Juuri- ja logaritmifunktiot.)

188. suurin arvo $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ kohdissa $\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku,
pienin arvo $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ kohdissa $\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
(Funktio f on jaksollinen jaksona 2π, joten riittää, kun määritetään funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktion $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x$
$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x$
$= -2\sin^2 x - \sin x + 1$ arvo on nolla, kun
$\sin x = -1$ tai $\sin x = \frac{1}{2}$.
Välillä $]0, 2\pi[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ ja $\frac{3\pi}{2}$.)

189. $74°$
(Jos kulman α suuruus radiaaneina on x, niin $A(x) = 2 \sin x \cos x + 6 \sin x$, missä x on välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. Derivaattafunktio on
$A'(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 6\cos x$
$= 2\cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) + 6\cos x$
$= 4\cos^2 x + 6\cos x - 2$.
$A'(x) = 0$, kun $\cos x \approx 0{,}2808$.
Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on derivaattafunktion nollakohta, jonka likiarvo on 1,286.
Samanlainen ongelma oli tehtävässä 105 kirjassa Juuri- ja logaritmifunktiot.)

190. suurin arvo 2 kohdissa $n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku,
pienin arvo -2 kohdissa $\pi + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
(Funktio f on jaksollinen jaksona 2π, joten riittää, että määritetään suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktiolla $f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \sin x$
$= 2 \sin x (\cos x - 1)$ on välillä $]0, 2\pi[$ nollakohta π. Toinen tapa on sijoittaa
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, jolloin
$f(x) = 1 - \cos^2 x + 2\cos x$, merkitä $\cos x = t$ ja määrittää funktion $g(t) = 1 - t^2 + 2t$ suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-1, 1]$.)

191. suurin arvo $\frac{9}{4}$, pienin arvo 0

(Voidaan tutkia funktiota
$f(x) = \sin^2 x + 2\cos^2 x + \sin x$ välillä $[0, 2\pi]$.
Derivaattafunktion
$f'(x) = -2 \sin x \cos x + \cos x$
$= -\cos x (2 \sin x - 1)$ välillä $]0, 2\pi[$ olevat nollakohdat ovat $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{5\pi}{6}$.

Voidaan myös sijoittaa $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, merkitä $\sin x = t$ ja tutkia funktiota
$u(t) = -t^2 + t + 2$ välillä $[-1, 1]$.)

192. suurin arvo 13 kohdissa $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku,
pienin arvo 5 kohdissa $x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku

193. suurin arvo $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pienin arvo $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
(Jaksollinen funktio f on määritelty kaikkialla ja sen jakso on 2π. Riittää, kun määritetään funktion f suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktiolla $f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$ on välillä $]0, 2\pi[$ nollakohdat $\frac{\pi}{3}$ ja $\frac{5\pi}{3}$.)

194. Voidaan tutkia erotusfunktiota $f(x) = \sin^3 x - 3 \sin x - 2$ suljetulla välillä $[0, 2\pi]$. Osoittautuu, että funktion f suurin arvo välillä $[0, 2\pi]$ on 0. Koska funktio f on jaksollinen jaksona 2π, funktion f suurin arvo koko reaalilukujen joukossa on 0.
Siis $f(x) \leqslant 0$ kaikilla x.
Voidaan myös sijoittaa $\sin x = t$ ja osoittaa, että funktion $u(t) = t^3 - 3t - 2$ suurin arvo välillä $[-1, 1]$ on 0.

195. suurin arvo $\sqrt{13}$ ja pienin arvo $-\sqrt{13}$
(Jaksollisuuden vuoksi riittää, kun tutkitaan funktiota f välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktio $f'(x)$ on nolla, kun $\tan x = \frac{2}{3}$.
Välillä $]0, 2\pi[$ on siis kaksi derivaattafunktion nollakohtaa, joista toisessa on $\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ja $\cos x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ja toisessa $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ ja $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$.)

196. suurin arvo $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ kohdissa $\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ ja $\frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku,
pienin arvo $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$ kohdissa $\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ ja $\frac{11\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Funktiota $g(x)$ tutkitaan välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktio on
$g'(x) = \cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x$
$= \cos^2 x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$.
Välillä $]0, 2\pi[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ ja $\frac{11\pi}{6}$.)

197. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 83 %
(Puolisuunnikkaan pinta-ala on $A(x) = \sin x \cos x + \sin x$, missä x on välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. Derivaattafunktiolla
$A'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x$
$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x$
$= 2 \cos^2 x + \cos x - 1$
on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ nollakohta $\frac{\pi}{3}$.)

198. 63°
(Jos x on kulman α suuruus radiaaneina, niin poikkileikkauksen pinta-ala neliösenttimetreinä on $A(x) = 900 \sin x \cos x + 1200 \sin x$, missä x on välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Derivaattafunktio
$f'(x) = 900 (\cos^2 x - \sin^2 x) + 1200 \cos x$
$= 1800 \cos^2 x + 1200 \cos x - 900$.
Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on derivaattafunktion nollakohta $x \approx 1{,}1058$.)

199. $2\sqrt{5}\,R$

(Olkoon x keskipisteestä kehällä olevaan kärkeen piirretyn säteen ja halkaisijan välisen kulman suuruus radiaaneina. Suorakulmion piiri on $4R\cos x + 2R\sin x$.
Koska $2R$ on positiivinen vakio, piiri on suurin, kun funktion $f(x) = 2\cos x + \sin x$ arvo on suurin. Muuttuja x on välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Derivaattafunktiolla $f'(x) = -2\sin x + \cos x$ on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ yksi nollakohta x_0, jolle $\tan x_0 = \frac{1}{2}$. Tällöin on $\sin x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $\cos x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.)

200. rantaa pitkin 11,0 km ja sitten suoraan saareen

(Olkoon C saarta B lähin kohta rannalla. Suorin reitti muodostuu janoista BP ja PA, missä P on rannan piste A:n ja C:n välissä. Olkoon x kulman CBP suuruus radiaaneina. Jos kustannukset kilometriä kohden ovat maalla k, niin kaapelointikustannukset ovat $2k \cdot \frac{7}{\cos x} + k(15 - 7\tan x)$. Koska k on positiivinen vakio, kustannukset ovat pienimmät, kun funktion $f(x) = \frac{14}{\cos x} + 15 - 7\tan x$ arvo on pienin. Tutkitaan funktiota suljetulla välillä $[0, a]$, missä $a \approx 1{,}134$ on terävä kulma, jolle $\tan a = \frac{15}{7}$. Välin sisällä on derivaattafunktion $f'(x) = \frac{14\sin x}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos^2 x}$ nollakohta $\frac{\pi}{6}$. Samanlainen ongelma oli esimerkissä 1 kirjan Juuri- ja logaritmifunktiot luvussa Juurifunktioiden sovelluksia.)

201. 19,7 km pitkä, erkaantumiskohta 14,6 km risteyksestä itään

(Jos x on yhdystien ja itään kulkevan tien välisen terävän kulman suuruus radiaaneina, niin tien pituus on $f(x) = \frac{6}{\sin x} + \frac{8}{\cos x}$, missä x on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$. Derivaattafunktion

$f'(x) = -\frac{6\cos x}{\sin^2 x} + \frac{8\sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{-6\cos^3 x + 8\sin^3 x}{\sin^2 x\,\cos^2 x}$ arvo on nolla, kun

$\tan^3 x = \frac{3}{4}$. Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on derivaattafunktion nollakohta $x_0 \approx 0{,}7375$. Pienin arvo perustellaan kulkukaavion avulla. Sama ongelma oli tehtävässä 114 kirjassa Juuri- ja logaritmifunktiot.)

202. 56°

(Valitaan muuttujaksi x tikkaiden ja maan välisen kulman suuruus radiaaneina.

Tällöin $d(x) = (7 - \frac{4}{\sin x})\cos x$.

Muuttuja x on suljetulla välillä $[x_0, \frac{\pi}{2}]$, missä x_0 on välin $]0, \frac{\pi}{2}[$ kohta, jolle $\sin x_0 = \frac{4}{7}$.

Derivaattafunktion $d'(x) = -7\sin x + \frac{4}{\sin^2 x}$ arvo on nolla, kun $\sin^3 x = \frac{4}{7}$.

Samanlainen ongelma oli tehtävässä 116 kurssissa Juuri- ja logaritmifunktiot.)

Lukujono

203. Esimerkiksi:

Neljännestä jäsenestä alkaen kaikki jäsenet ovat nollia: 1, 2, 3, 0, 0, … .
Jonon kahdeksas jäsen on 0.

Jono on positiivisten kokonaislukujen jono: 1, 2, 3, 4, 5, … .
Jonon kahdeksas jäsen on 8.

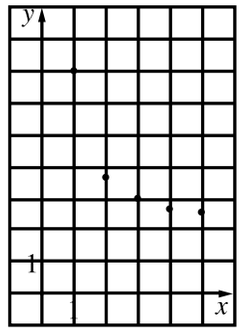
Jono on jaottomien positiivisten kokonaislukujen jono: 1, 2, 3, 5, 7, … .
Jonon kahdeksas jäsen on 17.

Kolmannesta jäsenestä alkaen jokainen jonon jäsen on kahden edellisen jäsenen summa: 1, 2, 3, 5, 8, … .
Jonon kahdeksas jäsen on 34.

Kolmannesta jäsenestä alkaen jonon jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen tulo lisättynä yhdellä: 1, 2, 3, 7, 22, … .
Jonon kahdeksas jäsen on 528 706.

204. 3, -5, -15, 75, $-1\,125$, $-84\,375$

205. $7,\ \frac{11}{3},\ 3,\ \frac{19}{7},\ \frac{23}{9},\ \ldots,\ \frac{203}{99}$



206. a) $a_n = -n$ b) $a_n = 2n - 2$

207. a) $a_n = (-1)^n$
b) $a_n = (-3)^n = (-1)^n\, 3^n$
c) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 5$
d) $a_n = 5 + (-1)^{n+1} \cdot 5$

208. a) Ei ole. b) On, 35. jäsen.

209. Jono (a_n) on aidosti vähenevä.

(Funktio $f(x) = \frac{3x+7}{x+1}$ on määritelty ja derivoituva välillä $]-1, \infty[$, joka sisältää positiivisten kokonaislukujen joukon.

Derivaattafunktio $f'(x) = -\frac{4}{(x+1)^2}$ on negatiivinen funktion f koko määrittelyjoukossa. Siis funktio f on aidosti vähenevä välillä $]-1, \infty[$. Siis $f(1) > f(2) > f(3) > \ldots$, eli $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.)

210. Funktio $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$ on määritelty ja derivoituva koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$.
Derivaattafunktiosta nähdään, että funktio f on kaikkialla aidosti kasvava.
Siis $f(0) < f(1) < f(2) < \ldots$,
eli $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$.

211. $a_{14} = 132\,384$

(Tutkitaan funktiota $f(x) = x(12200 - x^3)$. Funktio f on määritelty ja derivoituva koko reaalilukujen joukossa. Kulkukaavion mukaan funktio f on aidosti kasvava välillä $]-\infty, \sqrt[3]{3050}[$ ja aidosti vähenevä välillä $[\sqrt[3]{3050}, \infty[$. Koska $\sqrt[3]{3050} \approx 14{,}502$, jonon $a_n = f(n)$ suurin jäsen on joko $a_{14} = f(14)$ tai $a_{15} = f(15)$.)

212. a) 1, 3, 6, 10, 15, 21

b) $k_n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$

(Kuvion mukaan $k_n = \frac{1}{2}((n+1)^2 - (n+1))$.)

c) $S_n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$, $S_{764} = 292\,230$

213. Esimerkiksi:

Neljännestä jäsenestä alkaen jokainen jonon jäsen on ykkönen: 1, 2, 4, 1, 1, … .
Kahdeksas jäsen on 1.

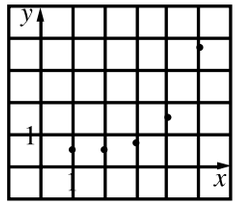
Seuraava jäsen saadaan aina edellisestä kertomalla kahdella: 1, 2, 4, 8, 16, … .
Kahdeksas jäsen on 128.

Jäsenten erotus kasvaa aina yhdellä:
1, 2, 4, 7, 11, … .
Kahdeksas jäsen on 29.

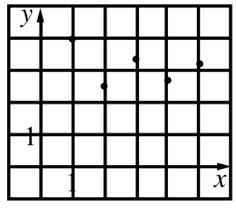
Kolmannesta jäsenestä alkaen jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen tulo kerrottuna kahdella: 1, 2, 4, 16, 128, … .
Kahdeksas jäsen on 8 589 934 592.

214. 2, 6, 4, 5, 4,5, 4,75

215. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{4}$, $u_{50} \approx 2{,}7 \cdot 10^{49}$



b) 4, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{5}$, $u_{50} = 2\frac{49}{50}$



216. a) Ei ole.
b) On, vakiojono $b_n = 1$.
c) On, vakiojono $c_n = 0$.
d) Ei ole.
Jonot (a_n) ja (d_n) ovat samoja.

217. a) $a_n = 5n$, 23. jäsen on 115.
b) $a_n = 5n - 5$, 23. jäsen on 110.
c) $a_n = 5n + 8$, 23. jäsen on 123.

218. $a_n = \frac{2n}{2n+1}$

219. a) $a_n = 5^n$ b) $a_n = 5^{n-1}$
c) $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$

220. a) 25 b) 30

221. a) Tutkitaan välillä $]-3, \infty[$ määriteltyä funktiota $f(x) = \frac{2x+4}{x+3}$, jonka derivaattafunktio on $f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$.
b) Tutkitaan välillä $]-3, \infty[$ määriteltyä funktiota $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$, jonka derivaattafunktio on $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$.

222. Tutkitaan välillä $]\frac{1}{2}, \infty[$ määriteltyä funktiota $f(x) = \ln(3x-1) - \ln(2x-1)$, jonka derivaattafunktio on $f'(x) = -\frac{1}{(3x-1)(2x-1)}$.

223. $a_{24} = a_{25} = 49$

224. suurin $b_{13} = \frac{3}{28\,561}$,
toiseksi suurin $b_{14} = \frac{1}{9\,604}$ ja
kolmanneksi suurin $b_{15} = \frac{1}{10\,125}$

225. $b < -\frac{3}{4}$

226. $a_{72} = \frac{72^{50}}{2^{72}} \approx 1{,}56 \cdot 10^{71}$
(Funktio 2^x derivoidaan kaavalla $\mathrm{D}2^x = 2^x \ln 2$. Funktion $f(x) = \frac{x^{50}}{2^x}$ derivaattafunktiolla on nollakohta $\frac{50}{\ln 2}$.)

227. $a_{37} = \dfrac{100^{37}}{37^{37}} \approx 9{,}47 \cdot 10^{15}$

(Tutkitaan välillä $]0, \infty[$ määriteltyä funktiota $f(x) = \dfrac{100^x}{x^x}$. Funktio x^x saadaan derivoitavaan muotoon kirjoittamalla $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$. Derivaattafunktiolla $f'(x)$ on nollakohta $\dfrac{100}{e} \approx 36{,}8$.)

228. b) Jos $f(x) = ax^2 + bx + c$, niin $u_n' = 2an + a + b$ ja $u_n'' = 2a$. Siis $\alpha = 2a$.

c) Ei ole, sillä toisen kertaluvun erotusjonon ensimmäiset jäsenet 2 ja 3 eivät ole yhtä suuret.

d) Koska jonon $-4,\ 17,\ 45,\ 80,\ 122, \ldots$ toisen kertaluvun erotusjono alkaa $7,\ 7,\ 7, \ldots$, pisteet ovat samalla paraabelilla. Seuraava paraabelin piste on $(6, 171)$. Toisen asteen kerroin $a = \dfrac{7}{2}$. (Jonon $-4,\ 17,\ 45,\ 80,\ 122, \ldots$ kuudes jäsen u_6 saadaan yhtälöstä $(u_6 - u_5) - (u_5 - u_4) = 7$.)

Aritmeettinen jono

229. a) $9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25$
b) $9,\ 4,\ -1,\ -6,\ -11$

230. neljä ensimmäistä jäsentä $7,\ -1,\ -9$ ja -17
$a_{n+1} - a_n = (15 - 8(n + 1)) - (15 - 8n) = -8$ kaikilla n, joten jono (a_n) on aritmeettinen.

231. a) $2n + 4$ b) 38

232. $a_n = 23 - 15n$
a) -67 b) -877 c) On, 126. jäsen.

233. a) -61 b) 819

234. 768

235. 358
(Pienin on 4 501, suurin 7 000 ja $7\,000 = 4\,501 + 357 \cdot 7$.)

236. $a_n = 17n - 11$
a) Ei ole. b) On, 1996. jäsen.

237. 112 cm

238. 2 440

239. a) On. $(a_{n+1} - a_n = 15)$
b) Ei ole. (Jono alkaa 2, 6, 12, mistä jo näkyy, että peräkkäisten jäsenten erotukset eivät ole yhtä suuret.)
c) On. $(a_{n+1} - a_n = -19)$

240. 143

241. Jos peräkkäisten jäsenten erotus on d, niin jäsentä a_n, missä $n \geqslant 2$, edeltävä jäsen on $a_n - d$ ja jäsenestä a_n seuraava jäsen on $a_n + d$. Lukujen $a_n - d$ ja $a_n + d$ keskiarvo on a_n.

242. 13.05.27
(Aikavälit peräkkäisten päällekkäinoloaikojen välillä ovat yhtä pitkät. Jos ensimmäinen ajanhetki $a_1 = 12.00$, niin $a_{12} = 24.00$.)

243. a) 30 000 b) 6 923
c) 2 308 (Luku on jaollinen luvuilla 3 ja 13, jos ja vain jos se on jaollinen luvulla $3 \cdot 13$.)
d) 34 615

244. 1 tai 7
(Peräkkäisten jäsenten erotus on lukujen $3\,085 - 5$ ja $6\,368 - 3\,085$ yhteinen tekijä.)

245. a) $1,\ 2,\ \log_3 15,\ \log_3 21,\ \log_3 27 = 3$
b) 9 843. jäsen

246. $a_3 = \dfrac{9}{2}$, $a_4 = \dfrac{27}{4}$ ja $a_n = 2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

Geometrinen jono

247. a) $9,\ -18,\ 36,\ -72,\ 144$

b) $9,\ 6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \frac{16}{9}$

248. neljä ensimmäistä jäsentä $80,\ 640,\ 5\,120$ ja $40\,960$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10 \cdot 2^{3(n+1)}}{10 \cdot 2^{3n}} = 8$ kaikilla n, joten jono (a_n) on geometrinen.

249. $\frac{512}{125} = 4{,}096$

250. a) 1 400 euroa $(1{,}052^3 \cdot 1\,200)$

b) $a_n = 1{,}052^{n-1} \cdot 1\,200$,
hinta 12. vuotena on 2 100 euroa

251. a) $-\frac{4}{3}$

b) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot 900$

c) $-6{,}674 \cdot 10^{12}$

252. a) $\sqrt{3}$ tai $-\sqrt{3}$

$(27^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}})$

b) $a_5 = 18,\ a_{10} = 162\sqrt{3}$ tai $a_{10} = -162\sqrt{3}$

253. a) Aidosti kasvava, kun $q > 1$.
Aidosti vähenevä, kun $0 < q < 1$.
b) Aidosti kasvava, kun $0 < q < 1$.
Aidosti vähenevä, kun $q > 1$.

254. 69

(Epäyhtälö $0{,}98^{n-1} \cdot 12 > 3$ toteutuu, kun $n < \frac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}98} + 1$.)

255. a) 21. neliö

(Pinta-alat muodostavat geometrisen jonon $A,\ 0{,}5A,\ 0{,}5^2A,\ \ldots$, missä A on alkuperäisen neliön pinta-ala. Jonon n. jäsen on $0{,}5^{n-1} \cdot A$. Ratkaistaan epäyhtälö $0{,}5^{n-1} \cdot A < 10^{-6}A$, josta ensin jaetaan A pois.)

b) 11. kolmio

(Pinta-alat muodostavat geometrisen jonon $A,\ \frac{1}{4}A,\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 A,\ \ldots$, missä A on alkuperäisen kolmion pinta-ala.)

256. a) $1{,}008^{n-1} \cdot 500$ $((0{,}96 \cdot 1{,}05)^{n-1} \cdot 500)$

b) $1{,}008^{n-1} \cdot 525$
$(1{,}05 \cdot (0{,}96 \cdot 1{,}05)^{n-1} \cdot 500)$

c) $1{,}008^{n-1} \cdot 21$ $(0{,}04 \cdot 1{,}008^{n-1} \cdot 525)$

d) 46. vuonna

257. $\frac{k^{a_{n+1}}}{k^{a_n}} = k^{a_{n+1} - a_n} = k^d$ kaikilla n, joten jono $k^{a_1},\ k^{a_2},\ k^{a_3},\ \ldots$ on geometrinen ja $q = k^d$.

258. $\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln q$ kaikilla n, joten jono $\ln a_1,\ \ln a_2,\ \ln a_3,\ \ldots$ on aritmeettinen ja $d = \ln q$. Vastaava tulos pätee kaikille logaritmeille.

259. a) $\frac{2}{3}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 36$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{19} \cdot 36 \approx 0{,}016$

260. a) 24 000, 24 500, 25 000, 25 500,
aritmeettinen jono, jossa
$a_n = 24\,000 + (n - 1) \cdot 500$

b) 24 000, 24 720, 25 461,60, 26 225,45,
geometrinen jono, jossa
$a_n = 1{,}03^{n-1} \cdot 24\,000$

261. a) 2 097 152 b) noin $2{,}25 \cdot 10^{15}$

262. a) aritmeettinen ($a_{n+1} - a_n = 3$ kaikilla n)
b) ei aritmeettinen eikä geometrinen
(Jo jonon kolmesta ensimmäisestä jäsenestä 1, 8 ja 27 huomataan, että peräkkäisten jäsenten erotus ja suhde eivät kumpikaan pysy samoina.)

c) geometrinen ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5}$ kaikilla n)

d) sekä aritmeettinen että geometrinen ($a_{n+1} - a_n = 0$ kaikilla n ja $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ kaikilla n.)

263. $a = 1$ tai $a = \frac{1}{2}$

(Peräkkäisten jäsenten suhteet ovat yhtä suuret.)

264. $a_1 = 5$ ja $a_2 = 5 \cdot 4^{\frac{1}{5}}$ $(= 5\sqrt[5]{4})$

265. 71 cm

($q^9 \cdot 42$, missä $q = \sqrt[12]{2}$.)

266. 20

267. 50. kuusikulmio
(Kun kuusikulmion yhden sivun päätepisteet yhdistetään kuusikulmion keskipisteeseen, muodostuu tasasivuinen kolmio. Sisään piirretyn kuusikulmion sivu on yhtä pitkä kuin kolmion korkeusjana. Kahden peräkkäisen kuusikulmion pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin sivujen suhteen $\frac{\sqrt{3}}{2}$ neliö.)

268. Olkoon q geometrisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ peräkkäisten jäsenten suhde. Jonon jäsentä a_n, missä $n \geqslant 2$, edeltävä jäsen on $\frac{a_n}{q}$, ja jäsenestä a_n seuraava jäsen on qa_n. Edeltävän ja seuraavan jäsenen geometrinen keskiarvo on

$$\sqrt{\frac{a_n}{q} \cdot qa_n} = \sqrt{a_n^2} = a_n.$$

269. a) $\frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{25}{216}, \frac{125}{1\,296}, \; p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$

b) Heittosarjat, joissa ensimmäinen kuutonen tulee 17. heitolla tai myöhemmin.

270. Käytössä ovat seuraavat pyöristetyt herkkyysluvut.

fysikaalinen	logaritminen
100	21°
125	22°
160	23°
200	24°
250	25°
320	26°
400	27°
500	28°
640	29°
800	30°
1000	31°

Pienin 4/7° ja suurin 3200/36°.
(Fysikaalisen asteikon peräkkäisten herkkyysluvun suhde on $\sqrt[10]{10} = 10^{\frac{1}{10}}$.)

271. 2, 8, 512, 134 217 728,
24. jäsen
(Jonon n. jäsen on $2^{3^{n-1}}$.)

Rekursiivinen jono

272. a) 3, 5, 9, 17, 33
b) 1, 4, 9, 16, 25

273. Kuusi ensimmäistä jäsentä 0, 2, 2, 0, 2 ja 2, 120. jäsen 2.

274. a) $a_1 = 5\,000$ ja $a_n = 1{,}3a_{n-1} - 1\,000$, kun $n \geqslant 2$
b) kymmenennen vuoden alussa
(Jonon jäseniä voidaan laskea laskimen Ans -näppäimen avulla.)

275. a) 7, 28, 112, 448, geometrinen jono, $a_n = 4^{n-1} \cdot 7$
b) 5, 8, 11, 14, aritmeettinen jono, $a_n = 3n + 2$

276. a) $a_1 = 5\,000$ ja $a_n = 1{,}04a_{n-1} + 5\,000$, kun $n \geqslant 2$
b) 46 071,13 euroa
c) 15. vuoden alussa
(Jonon jäseniä voidaan laskea laskimen Ans -näppäimen avulla.)

277. a) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, kun $n \geqslant 4$
b) 60

278. a) 3, $\frac{2}{3}$, 3, $\frac{2}{3}$, 3
b) 3, 11, 27, 59, 123

279. 105

280. a) $a_1 = 2\,000$ ja $a_n = 1{,}07a_{n-1} + 50$, kun $n \geqslant 2$
b) kymmenennen

281. a) $a_n = \frac{1}{3^{n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
b) $a_n = \frac{5}{n!}$

282. 13. eläkevuonna (Rahamäärät, jotka jäävät tilille edellisen vuoden korkojen lisäämisen ja noston jälkeen, muodostavat rekursiivisen jonon, jossa $a_1 = 50\,000$ ja $a_n = 1{,}06a_{n-1} - 6\,000$, kun $n \geqslant 2$.)

283. a) $a_1 = 4\,140$ ja $a_n = 1{,}035(a_{n-1} + 4\,000)$, kun $n \geqslant 2$
b) 37 473,98 euroa
c) 16. vuoden lopussa

284. a) Jono on geometrinen jono, sillä kun rekursiokaavan molemmat puolet jaetaan luvulla a_n, saadaan: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, kun $n \geqslant 2$.
b) Jono on aritmeettinen jono, sillä kun rekursiokaavan molemmilta puolilta vähennetään luku a_n, saadaan:
$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, kun $n \geqslant 2$.

285. a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geqslant 3$
(Summaan, jonka arvo on $n - 1$ lisätään 1, tai summaan, jonka arvo on $n - 2$ lisätään 2.)
b) 233 eri tavalla
c) 377 eri tavalla

286. 927 eri tavalla

287. a) $a_n = \frac{1}{n}$ $\left(a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right)$
b) $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

Aritmeettinen summa

288. a) 2 485 b) $\frac{n(n+1)}{2}$

289. 1 358
(Viimeinen yhteenlaskettava on $19 + 13 \cdot 12$.)

290. a) 70 ensimmäisen parittoman positiivisen kokonaisluvun summa $1 + 3 + \ldots + 139$.
Summan arvo on 4 900.
b) n:n ensimmäisen parittoman positiivisen kokonaisluvun summa $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$.
Summan arvo on n^2.

291. 1 892 tölkkiä
(22 kerrosta, ylimmässä on 2 tölkkiä)

292. 7 071 071
(Pienin yhteenlaskettava on 1 001 ja suurin 9 996.)

293. a) 27 300 euroa
(Korkoerät muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on 2 600 euroa ja viimeinen 130 euroa.)
b) 127 300 euroa

294. 31 putkea, yli jää 4 putkea

295. 31 m
(Summa on aritmeettinen, sillä renkaiden halkaisija pitenee aina määrällä $2p$, missä p on paperin paksuus, jolloin renkaiden pituus pitenee aina määrällä $\pi \cdot 2p$.)

296. vähintään 82
(Jonon n. jäsen on $2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1$. Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö
$n\frac{2 + (3n-1)}{2} > 10\,000$.)

297. vähintään 20 tuolia

298. $a_1 = 25$ ja $d = 7$
(Kolmen ensimmäisen jäsenen summa on $3a_1 + 3d$ ja kolmen seuraavan jäsenen summa $3a_1 + 12d$.)

299. $-134\,055$

300. 211,25 m

301. a) 1 691 b) 9 684

302. 3^{420}

303. 6 862,50 euroa

304. enintään 141 420:n
(Toisen asteen epäyhtälö $\frac{n(n+1)}{2} < 10^{10}$.)

305. 57 euroa

306. $a_1 = 73$ ja $d = 6$
($\sum_{n=1}^{10} a_n = 10a_1 + 45d$ ja
$\sum_{n=11}^{30} a_n = 20a_1 + 390d$)

307. a) 37 $(4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4)$
b) 2 611
c) $3n(n-1) + 1$

308. 9, 17, …
(Osoita, että aritmeettisen jonon, jonka kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $P(1)$ ja $P(2) - P(1)$, n:n ensimmäisen jäsenen summa on $P(n)$.)

309. Olkoon d aritmeettisen jonon (a_k) peräkkäisten jäsenten erotus. Jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on
$n\frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n$ ja
siis muotoa $an^2 + bn$, missä $a = \frac{d}{2}$ ja
$b = \frac{2a_1 - d}{2}$.
Toisaalta jokainen muotoa $an^2 + bn$ oleva lauseke on jonkin aritmeettisen jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa, sillä yhtälöparista $a = \frac{d}{2}$ ja $b = \frac{2a_1 - d}{2}$ voidaan ratkaista jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja peräkkäisten jäsenten erotus d. Saadaan $a_1 = a + b$ ja $d = 2a$.

310. $a_n = 1 + \frac{(n-1)n}{2}$, $a_{100} = 4\,951$

311. $u_n = 1 + \frac{(n-1)(5n-4)}{2}$, $u_{40} = 3\,823$
(Koska $u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} + 5$, jonon peräkkäisten jäsenten erotusten jono on aritmeettinen. Jäsen u_n voidaan kirjoittaa muotoon $u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n-1})$.)

312. a) 306 b) 250

c) 200 (Rationaaliluku $\frac{n}{1000}$ supistuu, jos ja vain jos n on jaollinen kahdella tai viidellä.)

313. 2 425,5

Geometrinen summa

314. a) 4 882 810 (Geometrisen summan kaavaan sijoitetaan $a = 2 \cdot 5$, $q = 5$ ja $n = 9$.)

b) $-1\,627\,604$ ($a = 1$, $q = -5$ ja $n = 10$)

c) 10 172 525 ($a = 5^2$, $q = 5^2$ ja $n = 5$)

315. a) $\frac{97\,656}{390\,625}$ ($a = \frac{1}{5}$, $q = \frac{1}{5}$ ja $n = 8$)

b) $\frac{4\,921}{6\,561}$ ($a = 1$, $q = -\frac{1}{3}$ ja $n = 9$)

316. a) $2^{41} - 1 \approx 2{,}2 \cdot 10^{12}$

b) $2^{11}(2^{30} - 1) \approx 2{,}2 \cdot 10^{12}$

317. 2 h 28 min

318. 18 100 euroa
(Jos ensimmäisen vuoden palkka on a, niin viiden ensimmäisen vuoden palkka on $\frac{a(1 - 1{,}05^5)}{1 - 1{,}05}$.)

319. 459 jäsentä
(Jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on $\frac{1 - 0{,}99^n}{1 - 0{,}99}$. Ratkaistaan epäyhtälö $\frac{1 - 0{,}99^n}{1 - 0{,}99} > 99$.)

320. 60 vuotta
(Merkitään nykykulutusta esimerkiksi a, jolloin maapallon öljyvarojen suuruus on $40a$. Vuosikulutukset ovat a, $0{,}985a$, $0{,}985^2a$, … , ja n vuoden yhteiskulutus on $\frac{a(1 - 0{,}985^n)}{1 - 0{,}985}$. Ratkaistaan epäyhtälö $\frac{a(1 - 0{,}985^n)}{1 - 0{,}985} < 40a$, joka ensimmäiseksi jaetaan a:lla.)

321. a) 17 676,36 euroa
(Geometrinen summa
$1{,}05^3 \cdot 500 + 1{,}05^4 \cdot 500 + \ldots + 1{,}05^{21} \cdot 500$
$= \frac{1{,}05^3 \cdot 500(1 - 1{,}05^{19})}{1 - 1{,}05}$.)

b) vähintään 1 697,18 euroa
(Ratkaistaan epäyhtälö
$\frac{1{,}05^3 \cdot x(1 - 1{,}05^{19})}{1 - 1{,}05} > 60\,000$.)

322. vuoden 2018 alussa
(Kun vuoden 2001 alusta on kulunut n vuotta, tilillä on ennen uutta talletusta rahaa
$1{,}05 \cdot 200 + 1{,}05^2 \cdot 200 + \ldots + 1{,}05^n \cdot 200$
$= \frac{1{,}05 \cdot 200(1 - 1{,}05^n)}{1 - 1{,}05}$.
Ratkaistaan epäyhtälö
$\frac{1{,}05 \cdot 200(1 - 1{,}05^n)}{1 - 1{,}05} > 5\,000$.)

323. $q = 3$ ja $a = \frac{2}{13}$
(Koska $aq^3 + aq^4 + aq^5 = q^3(a + aq + aq^2)$, niin $54 = q^3 \cdot 2$.)

324. $a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$
($a_n = 3^{n-1} \cdot 5 + \frac{2(1 - 3^{n-1})}{1 - 3}$)

325. a) rekursiivinen kuvailu $a_1 = 2\,000$ ja $a_n = 1{,}08a_{n-1} + 40$, kun $n \geqslant 2$, lauseke
$a_n = 1{,}08^{n-1} \cdot 2\,000 + \frac{40(1 - 1{,}08^{n-1})}{1 - 1{,}08}$
$= 2500 \cdot 1{,}08^{n-1} - 500$

b) 12. vuoden alussa

326. $1 - 3^{30} \approx -2{,}06 \cdot 10^{14}$

327. $2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$

328. a) $\frac{9^{21} - 1}{8} \approx 1{,}37 \cdot 10^{19}$

b) $\frac{299\,593}{2\,097\,152}$

329. a) 110 923 euroa
b) 701 949 euroa

330. 2 min 15 s

331. viikolla 14

332. a) 21 vuotta b) 39 vuotta

333. 30 969,20 euroa

334. vuoden 2016 alussa
(Pääoma, joka tuottaa 6 %:n korolla 15 000 euron koron, on 250 000 euroa.)

335. $q = 2$ ja $a_1 = \frac{1}{3}$ tai $q = -2$ ja $a_1 = -1$.

336. a) rekursiivinen kuvailu $a_1 = 2000$ ja $a_n = 0{,}8a_{n-1} + 50$, kun $n \geqslant 2$,
lauseke $a_n = 1750 \cdot 0{,}8^{n-1} + 250$,
kymmenennen vuoden alussa 485 yksilöä
(Koska n:n arvon kasvaessa potenssin $0{,}8^{n-1}$ arvot lähenevät nollaa, niin populaation suuruus lähenee 250:tä.)
b) 17. vuoden alussa

337. a) rekursiivinen kuvailu
$a_1 = a$ ja $a_n = 1{,}05a_{n-1} - h$, kun $n \geqslant 2$,
lauseke $a_n = 1{,}05^{n-1}a - 20(1{,}05^{n-1} - 1)h$
b) 44 867,18 euroa, 16. vuonna
c) 7 247,09 euroa
(Ratkaistaan h yhtälöstä
$1{,}05^{24} \cdot 100\,000 - 20(1{,}05^{24} - 1)h = 0$.)
d) 137 986,42 euroa
(Ratkaistaan a yhtälöstä
$1{,}05^{24}a - 20(1{,}05^{24} - 1) \cdot 10\,000 = 0$.)

338. a) rekursiivinen kuvailu $a_1 = 150\,000$ ja
$a_n = 1{,}08 \cdot a_{n-1} - s$, kun $n \geqslant 2$, lauseke
$a_n = 1{,}08^{n-1} \cdot 150\,000 - 12{,}5s(1{,}08^{n-1} - 1)$
b) 15 277,83 euroa ($a_{21} = 0$)
c) 305 556,60 euroa

339. $a_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$, $a_{15} = 2\,391\,485$

340. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$, $a_{15} = 9\,565\,937$
($a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) +$
$\ldots + (a_n - a_{n-1})$, missä erotusten summa on geometrinen summa.)

341. a) $u_n = a + \frac{2}{3}(b - a)(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1})$

Kun $a = 1$ ja $b = 4$, niin $a_{20} \approx 3{,}00000$.
(Rekursiivisen jonon $u_1 = a$, $u_2 = b$ ja
$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2}$, kun $n \geqslant 3$, peräkkäisten jäsenten erotusten jono on geometrinen, sillä $u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2})$.)

b) Jäsenet lähenevät lukua $a + \frac{2}{3}(b - a)$.

(n:n arvojen suuretessa potenssin $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ arvot lähenevät nollaa.)

342. a) $p_1 = \frac{3}{4}$, $p_2 = \frac{13}{16}$ ja

$p_n = \frac{3}{4}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$, kun $n \geqslant 3$

b) $p_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{20}(1 - (-\frac{1}{4})^{n-1})$,
$p_7 \approx 0{,}799988$, $p_8 \approx 0{,}800003$

c) lukua $\frac{4}{5}$

Äärettömät joukot ja numeroituvat joukot

343. Tupu $\leftrightarrow$ puhemies
Hupu $\leftrightarrow$ ensimmäinen varapuhemies
Lupu $\leftrightarrow$ toinen varapuhemies

344. $1 \leftrightarrow 13,\ 2 \leftrightarrow 26,\ 3 \leftrightarrow 39$ jne.
Vastaavuuden ilmaisee funktio $f(n) = 13n$ (vasemmalta oikealle) tai funktio $g(n) = \frac{n}{13}$ (oikealta vasemmalle).

345. a) $1 \leftrightarrow 2,\ 2 \leftrightarrow 4,\ 3 \leftrightarrow 6$ jne.
Vastaavuuden vasemmalta oikealle ilmaisee funktio $f(n) = 2n$.
b) $1 \leftrightarrow 1,\ 2 \leftrightarrow 3,\ 3 \leftrightarrow 5$ jne.
Vastaavuuden vasemmalta oikealle ilmaisee funktio $f(n) = 2n - 1$.

346. esimerkiksi funktio $f(t) = 2t$

347. Käytetään esimerkiksi funktiota $f(x) = a + x(b - a)$. Funktion f välillä $]0, 1[$ saamien arvojen joukko on väli $]a, b[$ ja funktio f saa jokaisen arvonsa tasan yhdessä kohdassa. Toiseen suuntaan käy esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{1}{b-a}(x - a)$.

348. Esimerkiksi funktio $\tan x$ saa välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ kaikki reaaliarvot ja jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa.

349. $a_{11} = -5$ ja $a_{2000} = 1000$, luku 2000 on jonon 4000. jäsen

350. Olkoon $a_1,\ a_2, \ldots$ jono, jonka jäseninä ovat kaikki positiiviset rationaaliluvut. Muodostetaan kuten esimerkissä 3 jono, jonka jäseninä ovat kaikki rationaaliluvut:
$0,\ a_1,\ -a_1,\ a_2,\ -a_2, \ldots$.

351. Esimerkin 4 nojalla on olemassa jono $a_1,\ a_2, \ldots$, jonka jäseninä ovat kaikki rationaaliluvut. Jos olisi olemassa jono $b_1,\ b_2, \ldots$, jonka jäseninä ovat kaikki irrationaaliluvut, niin jonossa $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots$ olisivat jäseninä kaikki reaaliluvut, mikä on mahdotonta, koska reaalilukujen joukko ei ole numeroituva.

Kertaustehtäviä

352. esimerkiksi kulmat $490°,\ 1\,930°,\ -230°,\ -3\,830°$

353. a) $\alpha = 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku, välillä $-720° \leqslant \alpha \leqslant 0°$ ovat kulmat $-90°,\ -270°,\ -450°$ ja $-630°$.
b) $\alpha = 270° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku, välillä $-720° \leqslant \alpha \leqslant 0°$ ovat kulmat $-90°$ ja $-450°$.

354. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan\alpha = \sqrt{15}$

($\sin\alpha$ voidaan ratkaista trigonometristen funktioiden Pythagoraan lauseella:
$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{15}{16}$, joten $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ tai $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Koska $180° < \alpha < 360°$ ja $\cos\alpha$ on negatiivinen, niin kulma α on kolmannessa neljänneksessä. Siis $\sin\alpha$ on negatiivinen. Edelleen on $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
Toinen tapa on laskea ensin kulman α sinin, kosinin ja tangentin itseisarvoilla piirtämällä mallikuvaksi suorakulmainen kolmio, jonka terävän kulman viereinen kateetti on 1 ja hypotenuusa 4. Vastainen kateetti on silloin $\sqrt{15}$. Kolmiosta saadaan $\sin\alpha$:n ja $\tan\alpha$:n itseisarvot, minkä jälkeen päätellään niiden todelliset merkit.)

355. $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

(Piirretään mallikuvaksi suorakulmainen kolmio, jossa terävän kulman vastainen kateetti on 3 ja viereinen kateetti 1.
Kolmion hypotenuusa on $\sqrt{10}$.
Siis $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ tai $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ja $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ tai $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.
Koska $90° < \alpha < 270°$ ja $\tan\alpha$ on negatiivinen, kulma α on toisessa neljänneksessä, jossa sini on positiivinen ja kosini negatiivinen.)

356. a) $\alpha \approx 139° + n \cdot 360°$ tai
$\alpha \approx -139° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha \approx 25° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 155° + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku
c) $\alpha \approx 79° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

357. a) $60° + n \cdot 360°$ ja $-60° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $210° + n \cdot 360°$ ja
$-30° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

358. $\alpha \approx 72° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
($\tan \alpha = 3$)

359. $\alpha = n \cdot 60°$, n kokonaisluku ($6\alpha = n \cdot 360°$)

360. $\alpha = 5° + n \cdot 120°$ tai $\alpha = 35° + n \cdot 120°$,
n kokonaisluku,
$-115°$, $-85°$, $5°$, $35°$, $125°$ ja $155°$
(Yhtälöstä $\sin(3\alpha + 30°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ saadaan:
$3\alpha + 30° = 45° + n \cdot 360°$ tai
$3\alpha + 30° = 135° + n \cdot 360°$.)

361. $\alpha = n \cdot 60°$, n kokonaisluku
(Yhtälö toteutuu kun $4\alpha = 2\alpha + n \cdot 360°$ tai
$4\alpha = -2\alpha + n \cdot 360°$ eli kun $\alpha = n \cdot 180°$ tai
$\alpha = n \cdot 60°$. Ensimmäinen ratkaisuparvi sisältyy jälkimmäiseen.)

362. a) $9{,}2°$ b) $-974°$

363. a) $-60°$ b) $225°$

364. a) $0{,}30$ b) $-7{,}35$

365. a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $-\frac{7\pi}{6}$

366. a) $n \cdot \pi$, n kokonaisluku
b) $\pi + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

367. a) -1 $(f(\pi) = 2 \sin \frac{3\pi}{2} - \cos 5\pi$
$= 2 \cdot (-1) - (-1))$
b) $-\frac{3}{2}$ $(f(\frac{\pi}{3}) = 2 \sin \frac{7\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3}$
$= 2 \cdot (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2})$

368. a) jakso $\frac{\pi}{3}$, arvojoukko $[-1, 1]$
b) jakso 4π, arvojoukko $[-6, 6]$

369. a) suurin arvo 12 kohdissa $x = \pi + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku, pienin arvo -2 kohdissa
$x = n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Suurin arvo kohdissa, joissa $\cos x = -1$, ja pienin arvo kohdissa, joissa $\cos x = 1$.)
b) suurin arvo 10 kohdissa $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$,
n kokonaisluku
pienin arvo -4 kohdissa $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$,
n kokonaisluku
(Funktion $\sin 2x$ arvojoukko on $[-1, 1]$, joten funktion $7 \sin 2x$ arvojoukko on $[-7, 7]$ ja funktion $g(x) = 3 + 7 \sin 2x$ arvojoukko on $[-4, 10]$. Funktio g saa suurimman arvonsa kohdissa, joissa $\sin 2x = 1$, ja pienimmän arvonsa kohdissa, joissa $\sin 2x = -1$.)

370. $-2 \leqslant a \leqslant 4$
(Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $\sin x = \frac{1 - a}{3}$
kanssa. Koska funktion $\sin x$ arvojoukko on
$[-1, 1]$, tulee olla $-1 \leqslant \frac{1 - a}{3} \leqslant 1$ eli
$-3 \leqslant 1 - a \leqslant 3$.)

371. $\sin x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan x = \frac{\sqrt{21}}{2}$

372. a) $x \approx -1{,}17 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 4{,}31 + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
b) $x \approx 1{,}15 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -1{,}15 + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
c) $x \approx -1{,}26 + n \cdot \pi$, n kokonaisluku

373. a) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
(Yhtälö $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.)

b) $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku (Yhtälö $\cos x = -\frac{1}{2}$.)

c) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku
(Yhtälö $\cos 2x = -1$.)

374. $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$,
n kokonaisluku
(Yhtälö toteutuu, kun $3x = x + \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ tai
$3x = \pi - (x + \frac{\pi}{2}) + n \cdot 2\pi$.)

375. $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = \pi + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
($\cos x\,(\cos x + 1) = 0$ eli $\cos x = 0$ tai
$\cos x + 1 = 0$)

376. a) $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai
$x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
($\sin^2 x = \frac{3}{4}$ eli $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tai $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

b) $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot \pi$,
n kokonaisluku
($\tan x = \sqrt{3}$ tai $\tan x = -\sqrt{3}$)

377. $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai
$x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
(Sijoittamalla $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ saadaan
yhtälö $-2\cos^2 x + \cos x = 0$ eli
$\cos x\,(-2\cos x + 1) = 0$.)

378. $2\cos x + 2\cos 2x + 2\sin x \cos x$

379. a) $\frac{3\sin x}{\cos^2 x}$
(Käytetään osamäärän derivointikaavaa tai funktion potenssin derivointikaavaa kirjoittamalla ensin $\frac{3}{\cos x} = 3\,(\cos x)^{-1}$.)

b) $\frac{\cos x}{\sin x}$

c) $-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$

380. $a = -2$, $b = 1$
$(f(\frac{\pi}{2}) = a\cos\pi + b\sin\frac{3\pi}{2} = -a - b$.
$f'(x) = -2a\sin 2x + 3b\cos 3x$ ja edelleen
$f''(x) = -4a\cos 2x - 9b\sin 3x$, joten
$f''(\frac{\pi}{2}) = -4a\cos\pi - 9b\sin\frac{3\pi}{2} = 4a + 9b$.
Ratkaistaan yhtälöpari
$-a - b = 1$ ja $4a + 9b = 1$.)

381. Kuvaaja leikkaa x-akselin pisteissä, joiden x-koordinaatit ovat muotoa $n\pi$. Leikkauspisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin $f'(n\pi) = \cos n\pi$ on 1, kun n on parillinen, ja -1, kun n on pariton. Siis kahteen leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat joko yhtä suuret, jolloin tangentit ovat yhdensuuntaiset, tai niiden tulo on $1 \cdot (-1) = -1$, jolloin tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

382. a) $\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
(Yhtälö $\sin x = 1$.)

b) $\frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$ ja $\frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku
(Yhtälö $\sin 2x = \frac{1}{2}$.)

383. Derivaattafunktio $f'(x) = 1 - \cos 3x$ on kaikkialla epänegatiivinen, sillä $\cos 3x \leqslant 1$ kaikilla x. Lisäksi derivaattafunktion nollakohdat $n \cdot \frac{2\pi}{3}$, n kokonaisluku, ovat erillisiä.
Siis funktio f on kaikkialla aidosti kasvava.

384. maksimikohta $-\frac{\pi}{4}$ ja maksimiarvo $-1+\frac{\pi}{2}$,

minimikohta $\frac{\pi}{4}$ ja minimiarvo $1-\frac{\pi}{2}$

(Derivaattafunktion
$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 2 = \tan^2 x - 1$ arvo on nolla, kun $\tan x = 1$ tai $\tan x = -1$. Jos käytetään tangentin derivointikaavan toista muotoa, saadaan $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2$,
jonka arvo on nolla, kun
$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat $-\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{\pi}{4}$.

Ääriarvot perustellaan kulkukaavion avulla.)

385. suurin arvo 2, pienin arvo -2
(Koska funktio f on jaksollinen jaksona 2π, riittää, kun määritetään funktion f suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$.
Derivaattafunktiolla
$f'(x) = 2\cos x + 2\cos x \sin x$
$= 2\cos x\,(1 + \sin x)$
on välillä $]0, 2\pi[$ nollakohdat $\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{2}$.

Toinen tapa on saattaa funktion f lauseke muotoon $f(x) = 2\sin x - (1 - \sin^2 x)$
$= \sin^2 x + 2\sin x - 1$, merkitä $\sin x = t$ ja määrittää funktion $g(t) = t^2 + 2t - 1$ suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-1, 1]$.)

386. suurin arvo 2, pienin arvo -2
(Koska funktio f on jaksollinen jaksona 2π, riittää, kun määritetään funktion f suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktion $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$ arvo on nolla, kun $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Välillä $]0, 2\pi[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat $\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{7\pi}{6}$.)

387. kohdat $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ ja $\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ ja

$-\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku

$(f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x + 1$
$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x + 1$
$= 2\cos^2 x - \cos x = \cos x\,(2\cos x - 1)$.

Derivaattafunktion arvo on nolla, kun
$\cos x = 0$ tai $\cos x = \frac{1}{2}$.)

388. $30°$ eli $\frac{\pi}{6}$ (Valitaan muuttujaksi x kantakulman suuruus radiaaneina. Tällöin kolmion kylkien pituus on $\frac{a}{\cos x}$ ja korkeusjanan pituus $a\tan x$. Tutkittava lauseke on $\frac{2a}{\cos x} - a\tan x$, missä $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Koska a on positiivinen vakio, lausekkeen arvo on pienin, kun funktion $f(x) = \frac{2}{\cos x} - \tan x$ arvo on pienin.
Derivaattafunktiolla
$f'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x}$
on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ nollakohta $\frac{\pi}{6}$.
Pienin arvo perustellaan kulkukaavion avulla.)

389. $a_n = \frac{n+1}{n^2}$

390. a) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 4$
b) $a_n = 4 + (-1)^{n+1} \cdot 4$
c) $a_n = 2 + (-1)^{n+1} \cdot 4$

391. On. Kolmas jäsen ja 17. jäsen.
(Ratkaistaan yhtälö $\frac{n^2 + 21}{2n - 3} = 10$.)

392. aidosti kasvava
(Tutkitaan välillä $]-2, \infty[$ määriteltyä funktiota $f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$. Koska derivaattafunktio $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ on positiivinen koko välillä $]-2, \infty[$, funktio f on aidosti kasvava välillä $]-2, \infty[$. Siten $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots$ eli $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ eli jono on aidosti kasvava.)

393. $a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b)$
$= kn + k + b - kn - b = k$ kaikilla n.
Siis jono (a_n) on aritmeettinen.

394. $a_n = 4n - 1$, $a_{130} = 519$

395. 3,90 m
(Istuintasojen korkeusero on 0,30 m, ja kymmenennen istuintason korkeus on 1,20 m + 9 · 0,30 m.)

396. 7 000
($a_1 + 19d = 2\,440$ ja $a_1 + 39d = -2\,360$)

397. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c^{k(n+1)+b}}{c^{kn+b}} = c^{k(n+1)+b-(kn+b)} = c^k$
kaikilla n. Siis jono (a_n) on geometrinen.

398. $a_n = 15 \cdot (-3)^{n-1}$, $a_{10} = -295\,245$

399. yhdestoista
(Koska seuraavan ympyrän säde on aina puolet edellisen ympyrän säteestä, seuraavan ympyrän pinta-ala on aina neljäsosa edellisen ympyrän pinta-alasta. Pinta-alat muodostavat geometrisen jonon A, $\frac{1}{4}A, \ldots$, missä A on ensimmäisen ympyrän pinta-ala.
Ratkaistaan epäyhtälö $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A < 10^{-6} A$, joka aluksi jaetaan A:lla.
Epäyhtälö toteutuu, kun $n > \frac{\lg 10^{-6}}{\lg \frac{1}{4}} + 1$.)

400. 533
(Epäyhtälö $1{,}01^{n-1} \cdot 5 < 1000$, joka toteutuu, kun $n < \frac{\lg 200}{\lg 1{,}01} + 1$.)

401. $a_1 = 12\,150$, $a_2 = \frac{12\,150}{\sqrt{3}}$ tai $a_2 = -\frac{12\,150}{\sqrt{3}}$
(Koska $q^4 \cdot 450 = 50$, niin $q^4 = \frac{1}{9}$.
Siis $q = \frac{1}{\sqrt[4]{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tai $q = -\frac{1}{\sqrt[4]{9}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Ensimmäinen jäsen saadaan yhtälöstä $q^6 a_1 = 450$, jossa $q^6 = \frac{1}{27}$.)

402. a) $a_1 = 1300$ ja
$a_n = 1{,}05a_{n-1} - 40$, kun $n \geqslant 2$
b) vuoden 2019 alussa
(Jonon jäseniä voidaan laskea laskimen Ans -näppäimen avulla.)

403. $a_n = 3^n\, n!$
($a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 3^2 \cdot 2$,
$a_3 = 3 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2 = 3^3 \cdot 3 \cdot 2, \ldots$)

404. a) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, kun $n \geqslant 3$
(Kuulijoiden lukumäärä tiettynä päivänä on edellisen päivän kuulijoiden määrä lisättynä edellistä edellisen päivän kuulijoiden kaksinkertaisella määrällä.)
b) 171

405. 3 015

406. 93,0 m $\quad (39 \cdot \frac{1{,}32 + 3{,}45}{2})$

407. 3 811 500
(Summan viimeinen yhteenlaskettava on 9998. Summa on $693 \cdot \frac{1\,002 + 9\,998}{2}$.)

408. 199 950 euroa
(Korot muodostavat aritmeettisen jonon $0{,}0325 \cdot 120\,000$, $0{,}0325 \cdot 117\,000, \ldots$, $0{,}0325 \cdot 3\,000$. Yhteenlaskettavia on 40.)

409. 344 istuinta
(Istuimien lukumäärät kehillä muodostavat aritmeettisen jonon $a,\ a+8,\ \ldots$. Viimeisellä kehällä on $a + 14 \cdot 8 = a + 112$ istuinta. Istuimien lukumäärä on

$$15 \cdot \frac{a + a + 112}{2} = 15(a + 56).$$

Ratkaistaan yhtälö $15(a + 56) = 6\,000$.)

410. vähintään 817
(Jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on

$$n\frac{1 + 1 + (n-1) \cdot 3}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö

$$\frac{n(3n-1)}{2} > 1\,000\,000$$ eli epäyhtälö

$3n^2 - n - 2\,000\,000 > 0$.)

411. $-16\,400$

412. a) $\frac{4\,095}{4\,096}$ (Geometrinen summa, jonka ensimmäinen yhteenlaskettava $a = \frac{1}{2}$, peräkkäisten yhteenlaskettavien suhde $q = \frac{1}{2}$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä 12.)

b) $\frac{4^{13} - 1}{3 \cdot 4^{12}} \approx 1{,}333$ (Geometrinen summa, jonka ensimmäinen yhteenlaskettava $a = 1$, peräkkäisten yhteenlaskettavien suhde $q = \frac{1}{4}$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä 13.)

413. a) 3 900 tonnia $(0{,}92^8 \cdot 7\,600)$
b) 29 000 tonnia
(Geometrisen jonon
$0{,}92^8 \cdot 7\,600,\ 0{,}92^9 \cdot 7\,600, \ldots$
11:n ensimmäisen jäsenen summa on

$$\frac{0{,}92^8 \cdot 7\,600 \cdot (1 - 0{,}92^{11})}{1 - 0{,}92}.)$$

414. vähintään 194
(Epäyhtälö $\frac{1 - 0{,}98^n}{1 - 0{,}98} > 49$, joka sievenee muotoon $0{,}98^n < 0{,}02$ ja toteutuu, kun

$$n > \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}98}.)$$

415. a) 3 852,35 euroa

$$\left(\frac{1{,}045 \cdot 300 \cdot (1 - 1{,}045^{10})}{1 - 1{,}045}\right)$$

b) 398,37 euroa
(Yhtälö $\frac{1{,}045x(1 - 1{,}045^{10})}{1 - 1{,}045} = 5\,000$.)

416. $a_n = 0{,}8^{n-1} \cdot 2000 + 500$,
populaatio 20. vuoden alussa on 530
(Jonon (a_n) rekursiivinen kuvailu on
$a_1 = 2500$ ja $a_n = 0{,}8a_{n-1} + 100$, kun $n \geqslant 2$.
Lasketaan jonon ensimmäisiä jäseniä:

$$a_1 = 2500,$$
$$a_2 = 0{,}8 \cdot 2500 + 100,$$
$$a_3 = 0{,}8(0{,}8 \cdot 2500 + 100) + 100$$
$$= 0{,}8^2 \cdot 2500 + 0{,}8 \cdot 100 + 100,$$
$$a_4 = 0{,}8(0{,}8^2 \cdot 2500 + 0{,}8 \cdot 100 + 100) + 100$$
$$= 0{,}8^3 \cdot 2500 + 0{,}8^2 \cdot 100 + 0{,}8 \cdot 100 + 100$$

jne. Huomataan, että

$$a_n = 0{,}8^{n-1} \cdot 2500 + 0{,}8^{n-2} \cdot 100 + 0{,}8^{n-3} \cdot 100 + \ldots + 100$$
$$= 0{,}8^{n-1} \cdot 2500 + \frac{1 - 0{,}8^{n-1}}{1 - 0{,}8} \cdot 100.$$

Hahmotuksen voi tehdä myös käyttämällä jonon yleistä muotoa
$a_1 = a$ ja $a_n = qa_{n-1} + b$, kun $n \geqslant 2$.)

Sarja A

1. -3

($f'(x) = -2\sin 2x - 2\sin x\cos x$,

$f'(\frac{\pi}{4}) = -2\cdot 1 - 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$)

2. $x = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$,

n kokonaisluku

(Jos $\sin x = 0$, niin luvut ovat $0,\ 0,\ 1$, eivätkä ne ole minkään geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Samoin jos $\cos x = 0$, luvuiksi saadaan $0,\ \pm 1,\ 1$. Muutoin päädytään ehtoon

$\frac{\sin x}{2\sin^2 x\cos x} = \frac{1}{\sin x}$ eli $2\sin^2 x\cos x = \sin^2 x$.

Saadaan yhtälö $\sin^2 x\,(2\cos x - 1) = 0$.)

3. 35. viikolla

(n:n ensimmäisen viikon aikana kokonaismyynti on $n\frac{600 + (600 + (n-1)\cdot 100)}{2}$

$= \frac{n(1100 + 100n)}{2}$. Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö $\frac{n(1100 + 100n)}{2} > 80\,000$ eli epäyhtälö $100n^2 + 1100n - 160\,000 > 0$ selvittämällä funktion $100n^2 + 1100n - 160\,000$ merkit.)

4. $u_n = 6\cdot 2^{n-1} - 1,\ u_{15} = 98\,303$

($u_n = 5 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + 3\cdot 2^{n-1}$

$= 5 + \frac{6(1 - 2^{n-1})}{1 - 2}$)

5. a) $\pi + n\cdot 2\pi$, n kokonaisluku

(Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla nähdään, että $\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$, kun $\cos x = -1$ tai $\cos x = 3$. Yhtälö $\cos x = 3$ ei toteudu millään muuttujan arvolla.)

b) suurin arvo 0, pienin arvo -4

(Funktio f on jaksollinen jaksona 2π, joten riittää, kun määritetään funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktiolla $f'(x) = -2\cos x\sin x + 2\sin x$

$= 2\sin x\,(-\cos x + 1)$ on välillä $]0, 2\pi[$ nollakohta π. Lasketaan funktion f arvot kohdassa π ja välin päätepisteissä 0 ja 2π.

Toinen tapa on merkitä $\cos x = t$ ja määrittää funktion $g(t) = t^2 - 2t - 3$ suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-1, 1]$.)

6. Tangentin yhtälö on $y - \sin a = \cos a\,(x - a)$.

Jos $\cos a = 0$, tangentti on joko suora $y = 1$ tai $y = -1$, jolloin tangentti ei kulje origon kautta.

Jos $\cos a \neq 0$, tangentti kulkee origon kautta, jos ja vain jos $0 - \sin a = \cos a\,(0 - a)$,

josta saadaan ehto $\frac{\sin a}{\cos a} = a$ eli $\tan a = a$.

Välillä $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ on yksi tällainen kohta, jonka kolmidesimaalinen likiarvo on $7{,}725$.

(Kyseiset kohdat löydetään määrittämällä välillä $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ olevat yhtälön $\tan x = x$ juuret eli funktion $f(x) = \tan x - x$ nollakohdat. Derivaattafunktio $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$ on epänegatiivinen koko välillä $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ ja sillä on välillä vain yksi nollakohta 2π, joten funktio f on välillä aidosti kasvava. Siis nollakohtia on korkeintaan yksi. Haarukoimalla nähdään, että $f(7{,}725) < 0$ ja $f(7{,}7255) > 0$, joten funktiolla on nollakohta, jonka kolmidesimaalinen likiarvo on $7{,}725$.)

Sarja B

1. a) $a^2 + b^2$
(Tulee olla $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$, eli
$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$.)

b) $a^2 - b^2$ tai $b^2 - a^2$

(Tulee olla $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$, eli $a_2^2 = a_1 a_3 = (a^2 - b^2)^2$.)

2. suurin arvo 5 ja pienin arvo -3
(Derivaattafunktio on $f'(x) = 1 - 4\sin 4x$.
Funktion $\sin 4x$ arvojoukko on $[-1, 1]$, joten funktion $4\sin 4x$ arvojoukko on $[-4, 4]$.
Funktion f' suurin arvo on $1 - (-4) = 5$ ja pienin arvo $1 - 4 = -3$.)

3. 15. viikolla
(Myyntimäärät muodostavat geometrisen jonon $300,\ 1{,}4 \cdot 300,\ 1{,}4^2 \cdot 300, \ldots$. Jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on $300 \cdot \frac{1 - 1{,}4^n}{1 - 1{,}4}$.

Ratkaistaan epäyhtälö $300 \cdot \frac{1 - 1{,}4^n}{1 - 1{,}4} > 90\,000$,

joka sievenee muotoon $1{,}4^n > 121$.)

4. suurin arvo 1, pienin arvo -1
(Koska $\cos x \geqslant -1$, funktio f on määritelty kaikkialla. Funktio f on jaksollinen jaksona 2π, joten riittää, kun määritetään suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$. Käyttämällä kaavaa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ derivaattafunktio sievenee muotoon $f'(x) = \frac{\sqrt{2}\cos x + 1}{(\sqrt{2} + \cos x)^2}$, joten derivaattafunktion nollakohdat saadaan yhtälöstä $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Välillä $]0, 2\pi[$ ovat nollakohdat $\frac{3\pi}{4}$ ja $\frac{5\pi}{4}$.)

5. enintään 64:n
(n:n ensimmäisen luvun 3 potenssin tulo on
$3^{1 + 2 + \ldots + n} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Epäyhtälö $3^{\frac{n(n+1)}{2}} < 10^{1000}$ toteutuu, kun
$\frac{n(n+1)}{2} < \frac{\lg 10^{1000}}{\lg 3}$ eli $\frac{n(n+1)}{2} < \frac{1\,000}{\lg 3}$.

Toisen asteen epäyhtälö $n^2 + n - \frac{2\,000}{\lg 3} < 0$
toteutuu, kun $-65{,}2 < n < 64{,}2$.)

6. $32°$
(Olkoon x kaltevuuskulman suuruus radiaaneina. Tällöin
$d = f(x) = \sin x\,(5 - \frac{3}{\cos x}) = 5\sin x - 3\tan x$,
missä muuttuja x on välillä $[0, b]$, missä $b \approx 0{,}9273$ on terävä kulma, jolle pätee
$\cos b = \frac{3}{5}$.

Derivaattafunktion
$f'(x) = 5\cos x - \frac{3}{\cos^2 x} = \frac{5\cos^3 x - 3}{\cos^2 x}$
arvo on nolla, kun $\cos x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$.

Välillä $]0, b[$ on derivaattafunktion nollakohta $x_0 \approx 0{,}56716$. Laatimalla funktion f kulkukaavio tai laskemalla funktion f arvot kohdassa x_0 ja välin $[0, b]$ päätepisteissä osoitetaan, että funktio f saa kohdassa x_0 suurimman arvon.)

Sarja C

1. $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{6}$

($f(\frac{\pi}{12}) = a \sin\frac{\pi}{6} + b\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$,
$f''(x) = -4a\sin 2x - 16b\cos 4x$ ja
$f''(\frac{\pi}{12}) = -4a\sin\frac{\pi}{6} - 16b\cos\frac{\pi}{3} = -2a - 8b$.
Ratkaistaan yhtälöpari
$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0$ ja $-2a - 8b = 1$.)

2. $x = \frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
(Tulee olla $\sin^2 x - (-\cos x) = -\cos x - \cos^2 x$ eli
$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos x = 0$.
Koska $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, saadaan yhtälö
$1 + 2\cos x = 0$ eli $\cos x = -\frac{1}{2}$.)

3. Funktion f derivaattafunktio on
$f'(x) = 1 + \tan^2 x + \cos x$.
Koska $\cos x \geqslant -1$ kaikilla x, niin $f'(x) \geqslant \tan^2 x$.
Derivaattafunktio $f'(x)$ on epänegatiivinen koko välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ja nolla vain kohdassa $x = 0$.
Siis funktio f on aidosti kasvava välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

4. $b_{67} = -\frac{17}{20\,151\,121} \approx -8{,}44\cdot 10^{-7}$
(Tutkitaan välillä $]0, \infty[$ määriteltyä funktiota $f(x) = \frac{50 - x}{x^4} = \frac{50}{x^4} - \frac{1}{x^3}$. Derivaattafunktiolla $f'(x) = -\frac{200}{x^5} + \frac{3}{x^4} = \frac{-200 + 3x}{x^5}$ on nollakohta $66\frac{2}{3}$. Funktion f kulkukaaviosta nähdään, että funktio f on aidosti vähenevä välillä $]0, 66\frac{2}{3}]$ ja aidosti kasvava välillä $[66\frac{2}{3}, \infty[$.
Siis jonon (b_n) pienin jäsen on joko b_{66} tai b_{67}. Lasketaan nämä molemmat ja valitaan pienin.)

5. 1 100 m^3
(Hakkuiden määrät muodostavat jonon
$0{,}03\cdot 1{,}05\cdot 1400$,
$0{,}03\cdot 1{,}05\cdot 0{,}97\cdot 1{,}05\cdot 1400$,
$0{,}03\cdot 1{,}05\cdot (0{,}97\cdot 1{,}05)^2\cdot 1400$, …
Jono on geometrinen jono, jossa
$q = 0{,}97\cdot 1{,}05 = 1{,}0185$. Hakkuiden yhteismäärä on jonon 21 ensimmäisen jäsenen summa
$\frac{0{,}03\cdot 1{,}05\cdot 1400\cdot (1 - 1{,}0185^{21})}{1 - 1{,}0185}$.)

6. 71°
(Olkoon x kysytyn kulman suurus radiaaneina, jolloin $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Metsässä kuljetun matkan pituus on $\frac{3}{\sin x}$ ja polulla kuljetun matkan pituus $6 - \frac{3}{\tan x} = 6 - \frac{3\cos x}{\sin x}$. Jos kulkunopeus metsässä on v, niin koko matkaan kuluva aika on $\frac{3}{\sin x} : v + (6 - \frac{3\cos x}{\sin x}) : 3v$. Koska v on positiivinen, aika on lyhin, kun funktion $f(x) = \frac{3}{\sin x} + 2 - \frac{\cos x}{\sin x}$ arvo on pienin.
Derivaattafunktion
$f'(x) = -\frac{3\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{-3\cos x + 1}{\sin^2 x}$
arvo on nolla, kun $\cos x = \frac{1}{3}$.
Derivaattafunktiolla on välillä $0 < x < \frac{\pi}{2}$ yksi nollakohta $x_0 \approx 1{,}2310$.
Kulkukaavion avulla osoitetaan, että funktio f saa kohdassa x_0 pienimmän arvon.
Kulman x_0 suuruus asteina on $1{,}2310\cdot\frac{180°}{\pi}$.
Ongelma voidaan ratkaista myös niin, että valitaan muuttujaksi suoran $y = 3$ piste $(x, 3)$, jota kohti lähdetään. Matkaan kuluva aika on tällöin $\frac{\sqrt{x^2 + 3^2}}{v} + \frac{6 - x}{3v}$.)

Sarja D

1. 1 430

(Yhtälöstä $5 + 9d = 68$ saadaan peräkkäisten jäsenten erotus $d = 7$. Jonon 20. jäsen on $5 + 19 \cdot 7 = 138$ ja jonon 20 ensimmäisen jäsenen summa $20 \cdot \frac{5 + 138}{2} = 1\,430$.)

2. $-\frac{120}{169}$

(Suorakulmaisesta kolmiosta tai trigonometristen funktioiden Pythagoraan lauseella saadaan, että

$\cos\alpha = \frac{12}{13}$ tai $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$.

Koska $90° < \alpha < 180°$, niin $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$.

Siis $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot (-\frac{12}{13})$.)

3. maksimikohdat $\frac{\pi}{12}$ ja $\frac{13\pi}{12}$,

minimikohdat $\frac{5\pi}{12}$ ja $\frac{17\pi}{12}$

(Derivaattafunktion $f'(x) = -2\sin 2x + 1$ nollakohdat saadaan yhtälöstä $\sin 2x = \frac{1}{2}$, joka toteutuu, kun $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$ tai $x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$.

Välillä $]0, 2\pi[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$ ja $\frac{17\pi}{12}$.

Ääriarvojen luonne selvitetään kulkukaavion avulla.)

4. vuoden 2014 lopussa

(Tarvittavien talletusten lukumäärä n ratkaistaan epäyhtälöstä $\frac{1{,}05 \cdot 2000 \cdot (1 - 1{,}05^n)}{1 - 1{,}05} > 30\,000$.

Epäyhtälöstä saadaan $n > 11{,}05$.)

5. 26,6°

(Olkoon x kantakulman suuruus radiaaneina. On määritettävä kohta, jossa funktio $f(x) = 2\cos x + \sin x$ saa pienimmän arvon, missä x on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$. Derivaattafunktion $f'(x) = -2\sin x + \cos x$ arvo on nolla, kun $\tan x = \frac{1}{2}$. Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on yksi derivaattafunktion nollakohta $x_0 \approx 0{,}46365$. Kulkukaaviosta nähdään, että funktio f saa suurimman arvon kohdassa x_0. Kulman x_0 suuruus asteina on $0{,}46365 \cdot \frac{180°}{\pi}$.)

6. $60\frac{2}{3}$

(*Tapa 1.* Olkoon jonon ensimmäinen jäsen a ja peräkkäisten jäsenten suhdeluku q. Tällöin $S_4 = a + aq + aq^2 + aq^3 = a + aq + q^2(a + aq)$ $= S_2 + q^2 S_2$. Koska $S_2 = 54$ ja $S_4 = 60$, niin $54 + 54q^2 = 60$, josta saadaan $q^2 = \frac{1}{9}$. Tällöin

$S_6 = S_4 + aq^4 + aq^5 = S_4 + q^4(a + aq)$

$= S_4 + q^4 S_2 = 60 + \frac{1}{81} \cdot 54 = 60\frac{2}{3}$.

Tapa 2. Käytetään summakaavaa ja ratkaistaan ensin q ja a. Yhtälöparin $\frac{a(1 - q^2)}{1 - q} = 54$ ja $\frac{a(1 - q^4)}{1 - q} = 60$ jälkimmäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{a(1 - q^2)(1 + q^2)}{1 - q} = 60$. Siis $54(1 + q^2) = 60$, josta saadaan $q^2 = \frac{1}{9}$ ja edelleen $q = \frac{1}{3}$ tai $q = -\frac{1}{3}$. Koska $a = \frac{54(1 - q)}{1 - q^2}$, niin vastaavat a:n arvot ovat $\frac{81}{2}$ ja 81.

Molemmissa tapauksissa

$q = \frac{1}{3}$, $a = \frac{81}{2}$ ja $q = -\frac{1}{3}$, $a = 81$

kuuden ensimmäisen jäsenen summa on $60\frac{2}{3}$.)

Sarja E

1. 17 264

(Aritmeettisen jonon 44, 48, … 83:n ensimmäisen jäsenen summa. Jonon 83. jäsen on $44 + 82 \cdot 4 = 372$ ja summan arvo

$83 \cdot \frac{44 + 372}{2}$.)

2. tangentti $y = -3x + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$, normaali

$y = \frac{1}{3}x - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}$

(Kuvaajan pisteen y-koordinaatti on

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin^2 \frac{3\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Tangentin kulmakerroin on $f'(\frac{\pi}{4})$. Koska

$f'(x) = 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 6 \sin 3x \cos 3x$, tangentin kulmakerroin on

$6 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -3$.

Tangentin yhtälö on $y - \frac{1}{2} = -3(x - \frac{\pi}{4})$.

Normaalin kulmakerroin on tangentin kulmakertoimen käänteisluvun vastaluku $\frac{1}{3}$ ja normaalin yhtälö on $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x - \frac{\pi}{4})$.)

3. a) 16

(Funktion nollakohdat ovat kohdat $n \cdot 2\pi$, missä n on kokonaisluku. Tulee olla

$100 \leqslant n \cdot 2\pi \leqslant 200$ eli $\frac{100}{2\pi} \leqslant n \leqslant \frac{200}{2\pi}$.)

b) 4 775

(Funktion nollakohdat ovat kohdat $\sqrt{n \cdot 2\pi}$ ja $-\sqrt{n \cdot 2\pi}$, missä n on epänegatiivinen kokonaisluku. Tulee olla $100 \leqslant \sqrt{n \cdot 2\pi} \leqslant 200$ eli $10\,000 \leqslant n \cdot 2\pi \leqslant 40\,000$.)

4. suurin arvo $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, pienin arvo $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(Funktio f on jaksollinen jaksona 2π, joten riittää, kun määritetään funktion f suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$. Kun derivaattafunktioon $f'(x) = -\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x$ sijoitetaan $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, saadaan $f'(x) = -2 \sin^2 x - \sin x + 1$. Yhtälöstä $-2 \sin^2 x - \sin x + 1 = 0$ saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $\sin x = -1$ tai $\sin x = \frac{1}{2}$. Välillä $]0, 2\pi[$ ovat derivaattafunktion nollakohdat $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ ja $\frac{3\pi}{2}$.)

5. $\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$, 5 249 404 473

(Muuttujan q funktio $1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}$ on funktion $1 + q + \ldots + q^n$ derivaattafunktio. Koska $q \neq 1$, niin $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.)

6. 524 287,5

(Lasketaan ensin yhteen kaikki ne välin $]0, 1[$ rationaaliluvut, joiden supistetun murtolukumuodon nimittäjä on sama luvun 2 potenssi 2^n. Osoittajien summa on silloin aritmeettinen summa:

$\frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n} + \frac{5}{2^n} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^n}$

$= \frac{1 + 3 + \ldots + (2^n - 1)}{2^n} = \frac{\frac{2^{n-1} \cdot 2^n}{2}}{2^n} = 2^{n-2}$.

Kysytty summa on siis geometrinen summa $\frac{1}{2} + 1 + \ldots + 2^{18}$.)

Hakemisto

alkukylki 8

annuiteettilaina 138

aritmeettinen jono
- määritelmä 95
- *n*. jäsenen kaava 97

aritmeettinen summa
- määritelmä 118
- laskukaava 119

Cantorin lävistäjäpäättely 142

geometrinen jono
- määritelmä 102
- *n*. jäsenen kaava 104

geometrinen summa
- määritelmä 127
- laskukaava 128

hyperboliset funktiot 74

jaksollinen funktio 54

kosekantti 44

kosini
- määritelmä 11
- merkkiympyrä 18
- arvojoukko 19
- symmetriakaavat 26
- kosiniyhtälön ratkaiseminen 29

kosinifunktio (muuttuja radiaaneina)
- jatkuvuus 53
- määrittelyjoukko 53
- kuvaaja 54
- jaksollisuus 54
- arvojoukko 55
- symmetriakaavat 56

kosinifunktion derivaatta
- funktion $\cos x$ derivaatta 67
- funktion $\cos f(x)$ derivaatta 70
- derivointikaavan perustelu 147

kotangentti 45

kulman kehäpiste 10

kulman tangenttipiste 38

loppukylki 8

lukujono
- merkitseminen 84
- määritelmä 85
- lukujonon kasvaminen ja väheneminen 89

lukujonon lauseke 85

negatiivinen kiertosuunta 8

neljännekset 18

numeroituva joukko 141

positiivinen kiertosuunta 8

potenssijoukko 143

Pythagoraan lause
trigonometrisille funktioille 21

radiaani 46

rekursiokaava 112

sekantti 44

sini
määritelmä 11
merkkiympyrä 18
arvojoukko 19
symmetriakaavat 26
siniyhtälön ratkaiseminen 30

sinifunktio (muuttuja radiaaneina)
jatkuvuus 53
määrittelyjoukko 53
kuvaaja 54
jaksollisuus 54
arvojoukko 55
symmetriakaavat 56

sinifunktion derivaatta
funktion $\sin x$ derivaatta 67
funktion $\sin f(x)$ derivaatta 70
derivointikaavan perustelu 146

summamerkki Σ 120

suunnattu kulma 8

tangentti
määritelmä sinin ja kosinin avulla . . . 37
määrittelyehto 37
geometrinen määritelmä 38
arvojoukko 39
tangenttiyhtälön ratkaiseminen 41

tangenttifunktio (muuttuja radiaaneina)
jatkuvuus 53
määrittelyjoukko 53
kuvaaja 55
jaksollisuus 55
arvojoukko 55

tangenttifunktion derivaatta 68

tasaerälaina 138

vastakulma 8

yhtä monta 140

yksikköympyrä 10

ylinumeroituva joukko 143

äärellinen joukko 141

ääretön joukko 141